uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Ingeniería de Control II

Tema 3:
Análisis de la estabilidad de los sistemas de tiempo discreto

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido,

2025

Contenido

Concepto de estabilidad
Asintótica y marginal

- **Estabilidad asintótica.** Se dice que un sistema es asintóticamente estable si su respuesta para cualesquiera condiciones iniciales tiende a cero asintóticamente en el régimen permanente. Es decir, la respuesta del sistema debida a las condiciones iniciales es

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = 0$$

- **Estabilidad marginal.** Si la respuesta del sistema debido a las condiciones iniciales permanece acotada pero no tiende a cero, el sistema se dice que es marginalmente estable.
- Esta segunda definición se refiere a la respuesta forzada del sistema para una entrada acotada. Una entrada está acotada cuando satisface que

$$|u(k)| < b_u, \quad 0 < b_u < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- **Estabilidad BIBO (Bounded-Input-Bounded-Output)** Se dice que un sistema tiene estabilidad BIBO si su respuesta a cualquier entrada acotada permanece acotada, es decir, para cualquier entrada que cumple la condición de ser acotada, la salida satisface que:

$$|y(k)| < b_y, \quad 0 < b_y < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Se ha visto anteriormente que las posiciones de los polos de la función de transferencia del sistema determinan la respuesta temporal. Esto tiene fuertes implicaciones sobre la estabilidad del sistema.
- Consideremos la señal exponencial $\{p^k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$ y su transformada z

$$\mathcal{Z}\{p^k\} = \frac{z}{z-p}$$

  donde p es un número real o complejo.
- La secuencia temporal para valores grandes de k viene dada por

$$|p^k| \rightarrow \begin{cases} 0 & |p| < 1 \\ 1 & |p| = 1 \\ \infty & |p| > 1 \end{cases} \tag{1}$$

- En general cualquier secuencia temporal puede ser descrita por

$$f(k) = \sum_{i=1}^{n} A_i p_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

cuya transformada Z viene dada por la expresión

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{z}{z - p_i}$$

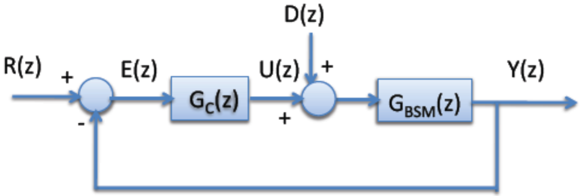
donde los A_i son los coeficientes de las fracciones parciales y los p_i son los polos en el dominio z.

- La secuencia estará acotada si sus polos están situados dentro o sobre el círculo de radio unidad, y decae exponencialmente si sus polos están dentro del círculo unidad.

- En ausencia de cancelaciones polo-cero un sistema lineal e invariante en el tiempo es **asintóticamente estable si los polos de su función de transferencia están situados en el interior del círculo unitario** y **marginalmente estable si los polos están sobre el círculo** unidad y no hay polos múltiples sobre el círculo unidad.

Estabilidad Interna

- La estabilidad tal y como se ha definido es aplicable a sistemas en bucle abierto y bucle cerrado con una entrada y una salida, pero cuando en el sistema existen varias entradas y salidas la definición realizada no basta.
- Por ejemplo, en el sistema con perturbaciones siguiente:



$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_C(z)G_{BSM}(z)}{1 + G_C(z)G_{BSM}(z)} \qquad \frac{Y(z)}{D(z)} = \frac{G_{BSM}(z)}{1 + G_C(z)G_{BSM}(z)}$$

- **Definición:** Se dice que un sistema es **internamente estable** cuando todas las funciones de transferencia que relacionan las entradas y las salidas del sistema son estables.

Determinación de la estabilidad de un sistema

- El método más simple para determinar la estabilidad de un sistema discreto dado por su función de transferencia es encontrar los polos del sistema.
- Uno de los métodos numéricos más usuales para ello es el método de Newton.
- En el caso de sistemas en tiempo continuo, una forma alternativa de determinar la estabilidad por un método simple es usar el **criterio de Routh-Hurwitz**.
- Para sistemas discretos, un método similar es el denominado test o **criterio de Jury** para sistemas cuya función de transferencia esta compuesta por polinomios con coeficientes reales (para polinomios con coeficientes complejos existe el criterio de Schur-Cohn).

Criterio de Jury

- Dado un polinomio $F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, a_0,$ con $a_n > 0,$
- las raíces de este polinomio están dentro del círculo de radio unidad si y sólo si se verifica que:
  - $F(1) > 0$
  - $(-1)^n F(-1) > 0$
  - $|a_0| < a_n$
  - $|b_0| > |b_{n-1}|$
  - $|c_0| > |c_{n-2}|$
  - $\ldots$
  - $|r_0| > |r_2|$

Criterio de Jury

Cont.

- Donde los términos $b_k, c_k, \dots, r_k$ se calculan del siguiente modo:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$\dots$$

$$r_0 = \begin{vmatrix} s_0 & s_3 \\ s_3 & s_0 \end{vmatrix}, \quad r_1 = \begin{vmatrix} s_0 & s_2 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix}$$

- En base a estos coeficientes se construye la tabla de Jury

Criterio de Jury

Tabla

Row	z^0	z^1	z^2	...	z^{n-k}	...	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-k}	...	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_k	...	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-k}	...	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_k	...	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	...	...	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...	...	c_0		
.	.	.	.	...	...			
.	.	.	.	...	...			
.	.	.	.	...	...			
$2n-5$	s_0	s_1	s_2	s_3				
$2n-4$	s_3	s_2	s_1	s_0				
$2n-3$	r_0	r_1	r_2					

Criterio de Jury
Ejemplo

$$F(z) = z^5 + 2.6z^4 - 0.56z^3 - 2.05z^2 + 0.0775z + 0.35$$

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
1	0.35	0.0775	-2.05	-0.56	2.6	1
2	1	2.6	-0.56	-2.05	0.0775	0.35
3	b_o	b_1	b_2	b_3	b_4	
4	b_4	b_3	b_2	b_1	b_o	
5	c_o	c_1	c_2	c_3		
6	c_3	c_2	c_1	c_o		
7	d_o	d_1	d_2			

Criterio de Jury
Ejemplo (Cont.)

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
1	0.35	0.0775	-2.05	-0.56	2.6	1
2	1	2.6	-0.56	-2.05	0.0775	0.35
3	-0.8775	-2.5728	-0.1575	1.854	0.8352	
4	b_4	b_3	b_2	b_1	b_o	
5	c_o	c_1	c_2	c_3		
6	c_3	c_2	c_1	c_o		
7	d_o	d_1	d_2			

Cálculo de la tercera fila

$$b_k = \begin{vmatrix} a_o & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$$

$$b_o = \begin{vmatrix} a_o & a_5 \\ a_5 & a_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.35 & 1 \\ 1 & 0.35 \end{vmatrix} = -0.8775$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} a_o & a_4 \\ a_5 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.35 & 2.6 \\ 1 & 0.0775 \end{vmatrix} = -2.5728$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_o & a_3 \\ a_5 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.35 & -0.56 \\ 1 & -2.05 \end{vmatrix} = -0.1575$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} a_o & a_2 \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.35 & -2.05 \\ 1 & -0.56 \end{vmatrix} = 1.854$$

$$b_4 = \begin{vmatrix} a_o & a_1 \\ a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.35 & 0.0775 \\ 1 & 2.6 \end{vmatrix} = 0.8352$$

27

La cuarta fila es igual que la tercera pero en orden inverso

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
1	0.35	0.0775	-2.05	-0.56	2.6	1
2	1	2.6	-0.56	-2.05	0.0775	0.35
3	-0.8775	-2.5728	-0.1575	1.854	0.8352	
4	0.8352	1.854	-0.1575	-2.5728	-0.8775	
5	c_o	c_1	c_2	c_3		
6	c_3	c_2	c_1	c_o		
7	d_o	d_1	d_2			

Para la fila 5 se usa de nuevo:

$$c_k = \begin{vmatrix} b_o & b_{n-k} \\ b_n & b_k \end{vmatrix}$$

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
1	0.35	0.0775	-2.05	-0.56	2.6	1
2	1	2.6	-0.56	-2.05	0.0775	0.35
3	-0.8775	-2.5728	-0.1575	1.854	0.8352	
4	0.8352	1.854	-0.1575	-2.5728	-0.8775	
5	0.077	0.7143	0.2693	0.5151		
6	c_3	c_2	c_1	c_o		
7	d_o	d_1	d_2			

y así sucesivamente

1. La primera fila está formada por los coeficientes de $F(z)$ en orden creciente de su potencia de z.
2. El número de filas en la tabla $2n-3$ es siempre impar, y los coeficientes de cada fila par son los mismos que los de la fila impar situada directamente encima pero en orden inverso.
3. Hay $n+1$ condiciones que corresponden a los $n+1$ coeficientes de la tabla.
4. Las condiciones 3 a $2n-3$ se calculan usando los coeficientes de la primera columna de la tabla de Jury junto con el último coeficiente de la fila precedente. Los coeficientes intermedios de la última fila nunca se usan y no requieren ser calculados.

5. Las condiciones 1 y 2 se calculan directamente a partir de $F(z)$. Si una de las dos primeras condiciones no se cumple, $F(z)$ tiene polos fuera del círculo unidad y no es necesario construir la tabla.
6. La condición 3, con $a_n = 1$, requiere que el término constante del polinomio sea menor que la unidad en magnitud, ya que el término constante es el producto de las raíces y debe ser menor que 1.

- Determinar la estabilidad por Jury del polinomio

$$F(z) = z^5 + 2{,}6z^4 - 0{,}56z^3 - 2{,}05z^2 + 0{,}0775z + 0{,}35 = 0$$

- Se calcula la tabla de Jury

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
1	0.35	0.0775	–2.05	–0.56	2.6	1
2	1	2.6	–0.56	–2.05	0.0775	0.35
3	–0.8775	–2.5729	–0.1575	1.854	0.8325	
4	0.8325	1.854	–0.1575	–2.5729	–0.8775	
5	0.0770	0.7143	0.2693	0.5151		
6	0.5151	0.2693	0.7143	0.0770		
7	–0.2593	–0.0837	–0.3472			

Test de Jury

Ejemplo 1 (Cont.)

- Las dos primeras condiciones requieren observar $F(z)$ en $z \pm 1$ y el resto 3 a 6 se obtienen rápidamente de la tabla de Jury.
  1. $F(1) = 1 + 2{,}6 - 0{,}56 - 2{,}05 + 0{,}0775 + 0{,}35 = 1{,}4175 > 0.$
  2. $(-1)^5 F(-1) = (-1)(-1 + 2{,}6 + 0{,}56 - 2{,}05 - 0{,}0775 + 0{,}35) = -0{,}3825 < 0$
  3. $|0{,}35| < 1$
  4. $|-0{,}8775| > |0{,}8325|$
  5. $|0{,}0770| < |0{,}5151|$
  6. $|-0{,}2593| < |-0{,}3472|$
- Las condiciones 2, 5 y 6 no cumplen el criterio de Jury, luego hay polos fuera del círculo unidad. Factorizada se puede comprobar:

$$F(z) = (z - 0{,}7)(z - 0{,}5)(z + 0{,}5)(z + 0{,}8)(z + 2{,}5) = 0$$

Test de Jury

Ejemplo 2

- Determinar el rango estable de ganancia K para un sistema muestreado con periodo 0,05 segundos, con bloqueador y cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{10K}{s(s+10)}$$

- **Solución**.
  - La función de transferencia discreta equivalente para el conjunto bloqueador-sistema-muestreador es:

$$\begin{aligned} G_{BSM}(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[\frac{G(s)}{s}]\} \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[\frac{K}{s^2(s+10)}]\} \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[0{,}1K(\frac{10}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+10}])\} \\ &= \frac{1{,}065\times 10^{-2}K(z+0{,}847)}{(z-1)(z-0{,}606} \end{aligned} \qquad (2)$$

- Si el sistema se realimenta unitariamente, la ecuación característica $1 + G_{BSM}(z)$ es

$$z^2 + (1{,}065 \times 10^{-2}K - 1{,}606)z + 0{,}606 + 0{,}92 \times 10^{-3}K = 0$$

- Las condiciones de estabilidad de Jury son:
  1. $F(1) = 1 + (1{,}0653 \times 10^{-2}K - 1{,}6065) + 0{,}6065 + 9{,}02 \times 10^{-3}K > 0 \equiv K > 0$
  2. $F(-1) = 1 - (1{,}0653 \times 10^{-2}K - 1{,}6065) + 0{,}6065 + 9{,}02 \times 10^{-3}K > 0 \equiv K < 1967{,}582$
  3. $|0{,}6065 + 0{,}0902K| < 1 \equiv +(0{,}6065 + 0{,}0902K) < 1$ $-(0{,}6065 + 0{,}0902K) < 1 \equiv -178{,}104 < K < 43{,}6199$

- Y de estas tres condiciones se obtiene que

$$0 < K < 43{,}6199$$

Análisis de la estabilidad de un sistema con Matlab

- El criterio de Jury es un método poco usado hoy en día debido a la existencia de potentes herramientas númericas de análisis.
- En MATLAB, veamos como se puede hacer:
  1. Supongamos el siguiente sistema $G(s) = \frac{2s+1}{s^2+4s+3}$
  2. Se introduce el modelo

```
>> num=[2 1];
>> den=[1 4 3];
>> G=tf(num,den)
Transfer function:
2s+1
------------
s^2+4s+3
>> roots(den)
ans =
-3
-1
```

  3. y de las posiciones de las raíces se analiza la estabilidad.

Lugar de las raíces en el plano z

- La ecuación característica de un sistema en bucle cerrado con realimentación unitaria viene dada por

$$1 + G(z)H(z) = 0$$

  donde $H(z)$ es la función de transferencia de la realimentación y $G(z)$ es la función de transferencia discreta del sistema.
- La construcción del lugar de las raíces se basa en las mismas reglas que para el caso continuo, si bien su significado e interpretación varía.

- Cálculo del lugar de las raíces, reglas:
  1. El número de ramas del LR es igual al número de polos de la función de transferencia en bucle abierto $G(z)H(z)$
  2. Para valores positivos de K, pertenecen al LR aquellos puntos sobre el eje real en los que la suma de polos y ceros situados a la derecha del punto que se considere es un entero impar.
  3. El LR comienza ($K = 0$) en los polos y termina ($K = \pm\infty$) en los ceros de la función de transferencia en bucle abierto o en el $\pm\infty$.
  4. Los ángulos de las asíntotas del LR que terminan en infinito están determinados por
     - Para $K > 0$ $\quad \gamma = \frac{(1+2k)\pi}{np_{GH}-nz_{GH}}$
     - Para $K < 0$ $\quad \gamma = \frac{2k\pi}{np_{GH}-nz_{GH}}$
  5. El eje real se corta con las asíntotas en

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{np} \mathrm{Re} p_i - \sum_{j=1}^{nz} \mathrm{Re} z_j}{np - nz}$$

Lugar de las raíces en el plano z

Reglas de construcción (Cont.)

6. Los puntos de dispersión de las ramas del LR entre dos polos sobre el eje real (o punto de convergencia entre dos ceros sobre el eje real) puede determinarse derivando la sensibilidad del bucle K respecto a z. Igualando esta derivada a cero y obteniendo las raíces de la ecuación resultante, estas raíces son los polos de dispersión o convergencia de las ramas.
7. Para $K > 0$ el ángulo de partida de las ramas desde un polo complejo es igual a 180 grados menos la suma de los ángulos desde los otros polos más la suma de los ángulos desde los ceros (los ángulos pueden ser positivos o negativos). Para $K < 0$ es 180 más el obtenido para $K > 0$.
8. El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real.

9. El cruce del lugar con el círculo unitario se determina usando el criterio de Jury para la ecuación característica en bucle cerrado. Se determina el rango de valores que K tiene que satisfacer para ser estable.
10. Los puntos del lugar satisfacen el criterio del módulo.

$$K = \frac{|z - p_1|.|z - p_2|.\ldots.|z - p_{np}|}{|z - z_1|.|z - z_2|.\ldots.|z - p_{nz}|}$$

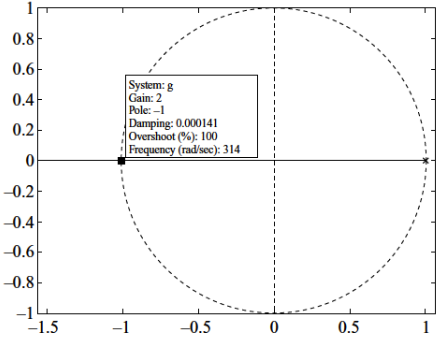
11. Los puntos del lugar satisfacen el criterio del argumento.

$$(1 + 2n)\pi = \sum_{i=1}^{np} \angle(z - p_i) - \sum_{i=1}^{nz} \angle(z - z_j), \quad K > 0$$

$$2n\pi = \sum_{i=1}^{np} \angle(z - p_i) - \sum_{i=1}^{nz} \angle(z - z_j), \quad K < 0$$

Ejemplo 1

- Supongamos el sistema de primer orden $\frac{1}{z-1}$ y un controlador de tipo proporcional K. La ecuación característica del sistema en bucle cerrado es
$$1 + \frac{K}{z-1} = 0$$
.
- El lugar de las raíces es de la forma



Ejemplo 1
Cont.

- El sistema será estable para las ganancias que dan lugar a polos dentro del círculo unidad.
- La ganancia crítica es el punto $(-1, 0)$ en

$$1 + \frac{K}{z-1} = 0$$

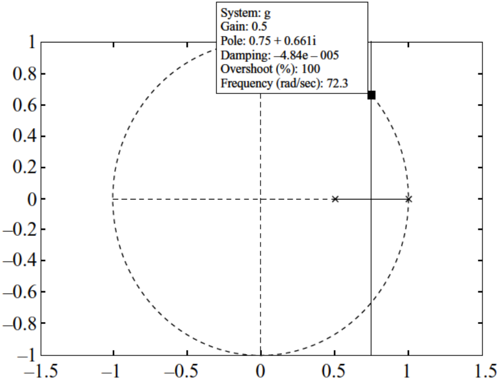
es decir

$$(z-1) + K = 0$$

y sustituyendo por el valor de z en el punto crítico, $z = -1$, obtenemos que la ganancia crítica es $K_{cr} = 2$.
- Por encima de esta ganancia el sistema se inestabiliza.

Ejemplo 2

- Supongamos el sistema de segundo orden $\frac{1}{(z-1)(z-0{,}5)}$ y un controlador de tipo proporcional K. La ecuación característica del sistema en bucle cerrado es $1 + \frac{K}{(z-1)(z-0{,}5)} = 0$.
- El lugar de las raíces toma la forma



Ejemplo 2

Cont.

- El sistema será estable para las ganancias que dan lugar a polos dentro del círculo unidad.
- La ecuación característica $1 + \frac{K}{(z-1)(z-0,5)} = 0$ se puede poner en la forma

$$(z-1)(z-0,5) + K = z^2 - 1,5z + K + 0,5 = 0$$

y como en el círculo unitario los dos polos tienen magnitud 1 y están en la vertical entre los polos $(z-1)$ y $(z-0,5)$, de aquí obtenemos que los polos están en

$$z_{1,2} = 0,75 \pm j0,661$$

y de aquí la ganancia crítica es $K_{cr} = 0,5$, que corresponde a estos polos.

- Se utiliza el comando **rlocus()**:

```
>> rlocus( tf([1],[1 -1.5 0.5 0],0.01))
```

donde 0.01 es el tiempo de muestreo.

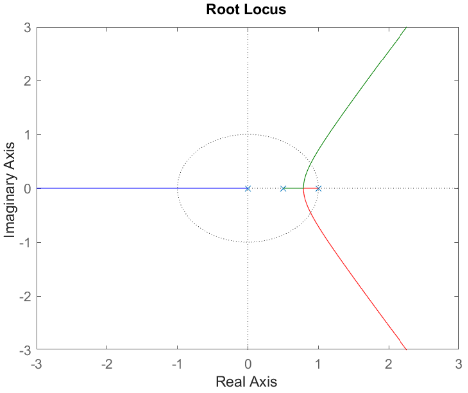


Figura 1: El lugar de las raíces del sistema.

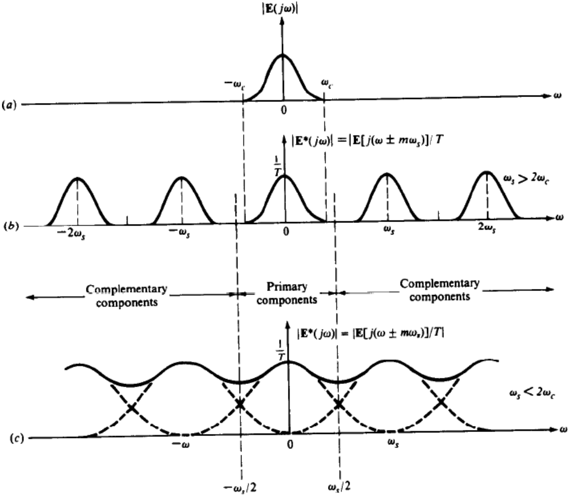


Figura 2: Transformadas de amplitud de Fourier.

- Tal y como se vio cuando se introdujo el teorema del muestreo, el efecto del muestreo es el que se aprecia en la figura de la transparencia anterior. En él se observa:
  1. El espectro frecuencial de la señal continua $e(t)$.
  2. El espectro de la señal muestreada a impulsos $e^*(t)$, cuando se muestrea con una frecuencia de muestreo $\omega_s > 2\omega_c$, donde ω_s es la frecuencia de muestreo y ω_c es la componente de frecuencia más alta de la transformada de Fourier de la señal $E(j\omega)$.
  3. El espectro de la señal muestreada a impulsos $e^*(t)$, cuando se muestrea con una frecuencia de muestreo $\omega_s < 2\omega_c$. Aquí se puede observar el fenómemo del **aliasing o de solapamiento** entre las componentes fundamental y complementarias del espectro frecuencial.

Relación entre el plano s y el plano z

Bandas

- La componente frecuencial de la señal muestreada $E^*(j\omega)$ con $\omega_s > 2\omega_c$ puede dividirse en una banda primaria y bandas complementarias que se repiten con periodo ω_s.
- Esto se puede observar con facilidad ya que, si sustituimos en $E^*(s)$ s por $s + jl\omega_s$ con l entero, tenemos que

$$E^*(s + jl\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-kT(s+jl\omega_s)} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-kTs}e^{-jkl\omega_s T}$$

y como $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, entonces $e^{-jkl\omega_s T} = e^{-j2\pi kl} = 1$ y se observa que

$$E^*(s + jl\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-kTs} = E^*(s)$$

- Un efecto muy importante es que si $E(s)$ tiene un polo (cero) en $s = s_1$, entonces $E^*(s)$ tendrá polos (ceros) en $s = s_1 \pm jl\omega_s$, donde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

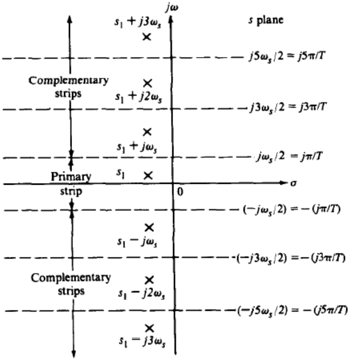


Figura 3: Efecto de las bandas sobre los polos.

- Dado que por lo general el sistema físico y el bloqueador de orden cero tienen un comportamiento similar a un filtro paso-bajo, los efectos de las bandas complementarias de alta frecuencia se atenúan, por lo que sólo los polos de la banda principal necesitan ser tenidos en cuenta para el diseño del sistema de control.
- Obsérvese que el polo primario s_1 y sus complementarios se mapean sobre el mismo punto del plano z (efecto aliasing).

Plano z

- Recordemos que la transformada de Laplace de una señal temporal muestreada $e^*(t)$ venía expresada como

$$E^*(s) = \mathcal{L}\left[e^*(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-ksT}$$

donde $e^*(t) = 0$ para $t < 0$ (unilateral) y $k = 0, 1, 2, \ldots$

- De esta expresión se obtenía con facilidad la transformada z de la señal muestreada sin más que hacer el cambio de variable $z = e^{sT}$ o ($s = \frac{1}{T} \ln z$ para pasar de la transformada z a la de Laplace).
- De donde se obtiene

$$E(z) = E^*(s)|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)z^{-k}$$

es decir la transformada z de la señal muestreada $e^*(t)$.

Relación entre el plano s y el plano z

- Se ha visto anteriormente que la relación entre la función de transferencia continua muestreada en el campo s y la discreta en z venía dada por la expresión

$$z = e^{sT}$$

- Queremos ahora saber cómo transforma esta relación los puntos de s en z.

Relación entre el plano s y el plano z

Líneas verticales en el plano *s*

- Las líneas verticales en el plano s son puntos en los que $s = \sigma + j\omega$ tiene $\sigma = cte$. Esos puntos en el plano z se corresponden con los que tienen

$$|z| = e^{\sigma T} = cte$$

que forman un círculo alrededor del origen.

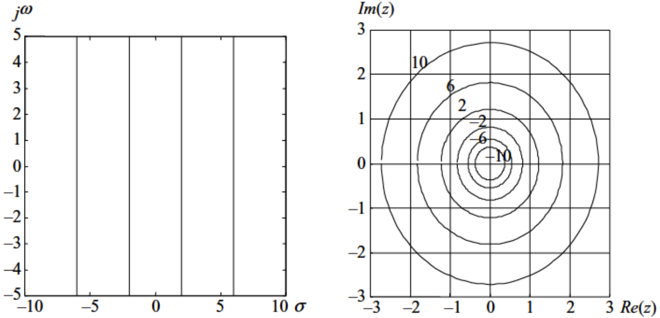


Figura 4: Líneas verticales en el plano s.

- Las líneas horizontales en el plano *s* son puntos en los que $s = \sigma + j\omega$ tiene $\omega = cte$. Esos puntos se corresponden en el plano *z* con los que tienen

$$\angle z = \omega T = cte$$

que forman una línea radial desde el origen.

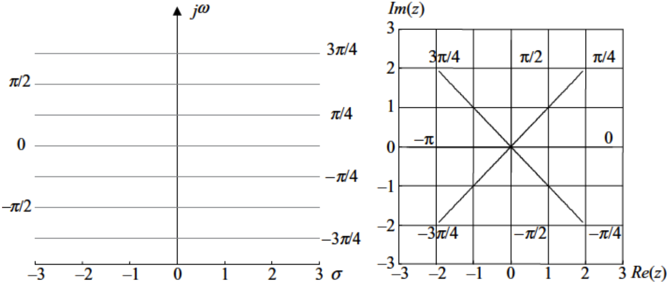


Figura 5: Líneas horizontales en el plano *s*.

Relación entre el plano s y el plano z

Puntos con igual amortiguamiento

- Dada la relación $z = e^{sT}$, tenemos que, para un sistema de segundo orden subamortiguado con polos en $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$, sus equivalentes en el plano z son

$$(z - e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)T})(z - e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_d)T}) = z^2 - \cos(\omega_d T)e^{-\zeta\omega_n T}z + e^{-2\zeta\omega_n T}$$

- Lo que da como resultado que las posiciones de los polos del sistema de segundo orden en el plano z están en

$$z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T}\angle \pm \omega_d T = |z|\angle \pm \theta$$

o de forma equivalente

$$\theta = \omega_d T = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$|z| = e^{-\zeta\omega_n T}$$

Relación entre el plano s y el plano z

Contornos de ζ y ω_n constante en plano z

- Las curvas de ζ y ω_n constante en el plano z se representan en la siguiente figura:

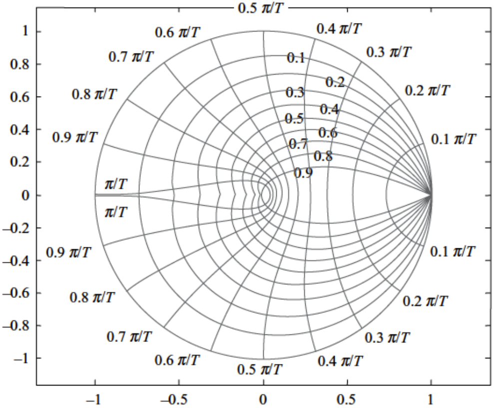


Figura 6: Contornos de ζ y ω_n constante en plano z.

Forma de la respuesta impulsional de un sistema

- La forma de la respuesta de un sistema depende de las posiciones de los polos de su ecuación característica y de las respuestas impulsionales correspondientes a ellos.

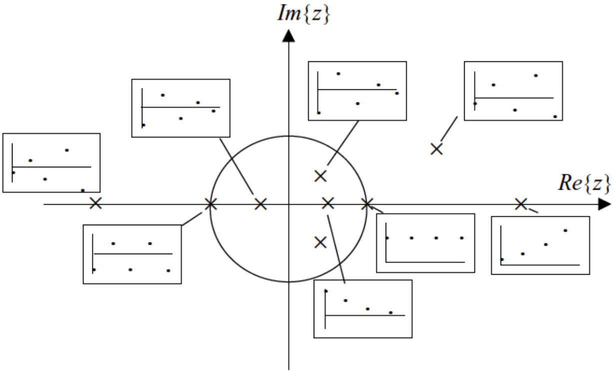


Figura 7: Posición de los polos, y la respuesta impulsional del sistema.

- La respuesta impulsional del sistema de primer orden con un integrador (tipo 1) $G(z) = \frac{z}{z-1}$ es

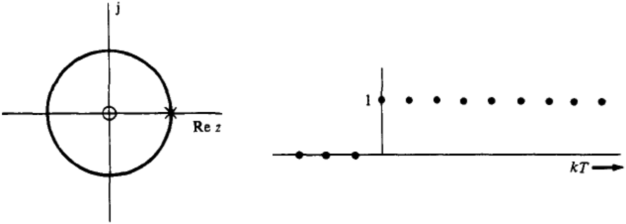


Figura 8: Posición de los polos, y la respuesta del sistema.

- Esta función de transferencia se corresponde con una señal escalón unitario con función de transferencia $G(s) = \frac{1}{s}$.

- Si movemos el polo hacia el interior del círculo unidad, la respuesta impulsional del sistema de primer orden pasa a ser de tipo 0, $G(z) = \frac{z}{z-d}$ con $0 < d < 1$, es decir:

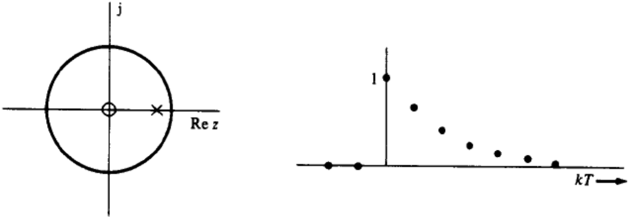


Figura 9: Posición de los polos, y la respuesta impulsional del sistema.

- Esta función de transferencia se corresponde con una señal con función de transferencia $G(s) = \frac{1}{s+a}$ y con $d = e^{-aT}$.

- Si discretizamos el sistema de segundo orden $G(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$, obtenemos $G(z) = \frac{z(z-\cos(aT))}{z^2+2z\cos(aT)+1}$ cuya respuesta impulsional es

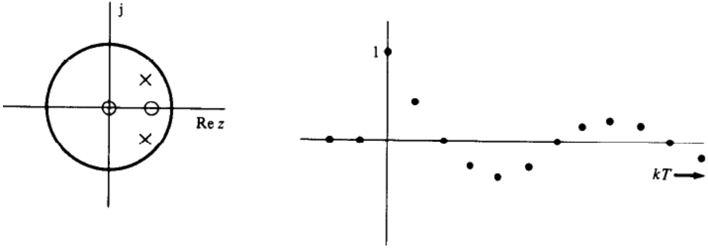
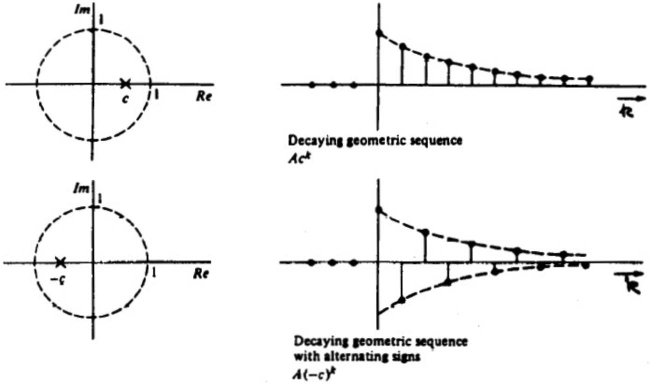


Figura 10: Posición de los polos, y la respuesta impulsional del sistema.

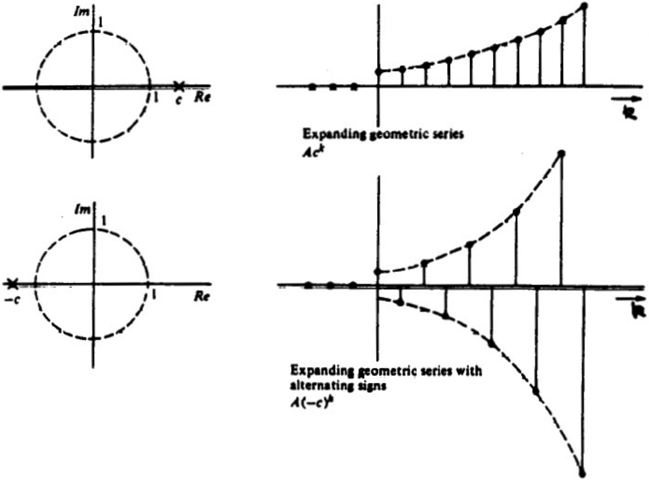
Respuesta impulsional de un sistema de tiempo discreto

Sistema de primer orden



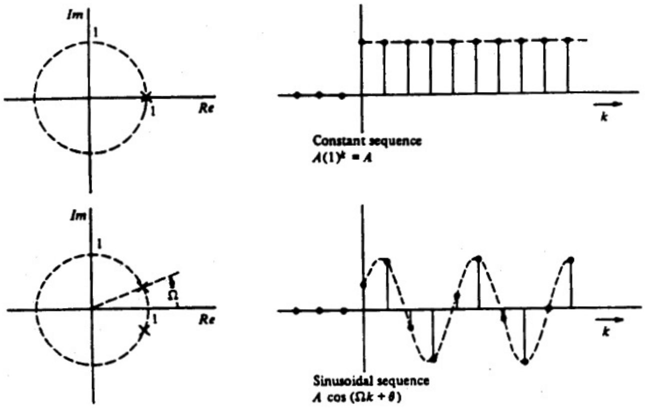
Respuesta impulsional de un sistema de tiempo discreto

Sistema de primer orden



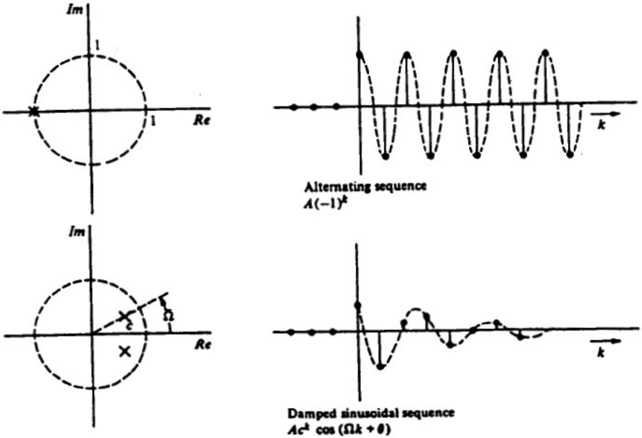
Respuesta impulsional de un sistema de tiempo discreto

Sistema de primer orden/segundo orden



Respuesta impulsional de un sistema de tiempo discreto

Sistema de segundo orden



Respuesta impulsional de un sistema de tiempo discreto

Sistema de segundo orden