Ingeniería de Control II

Tema 3:
Análisis de la estabilidad de los sistemas de tiempo discreto

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno S. Garrido

2025

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Examinar la estabilidad del sistema dado por la siguiente ecuación característica:

$$F(z) = z^4 - 1{,}2z^3 + 0{,}07z^2 + 0{,}3z - 0{,}08 = 0$$

Solución:

Aplicamos el criterio de Jury y se tienen que satisfacer las siguientes condiciones:

$$F(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

1. $|a_0| < a_n$
2. $F(1) > 0$
3. $(-1)^n F(-1) > 0$
4. Construimos la tabla de estabilidad de Jury:

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
2	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	
4	b_3	b_2	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2		

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_4 & a_k \end{vmatrix} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad n = 4$$

Si aplicamos el criterio al polinomio característico solicitado:

$$F(z) = z^4 - 1{,}2z^3 + 0{,}07z^2 + 0{,}3z - 0{,}08 = 0$$

1. $|a_0| < a_4, \quad |-0{,}08| < 1$
2. $F(1) = 1 - 1{,}2 + 0{,}07 + 0{,}3 - 0{,}08 = 0{,}09 > 0$
3. $(-1)^4 F(-1) = 1 + 1{,}2 + 0{,}07 - 0{,}3 - 0{,}08 = 1{,}89 > 0$
4. Construimos la tabla de estabilidad de Jury:

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.08	0.3	0.07	-1.2	**1**
2	1	-1.2	0.07	0.3	**-0.08**
3	-0.994	1.176	-0.0756	-0.204	
4	-0.204	-0.0756	1.176	-0.994	
5	**0.946**	**-1.184**	**0.315**		

Aplicando los criterios de estabilidad:

$$|b_0| > |b_3| \quad |-0{,}994| > |-0{,}204|$$

$$|c_0| > |c_2| \quad |0{,}946| > |0{,}315|$$

Como todas las condiciones se cumplen, la ecuación característica dada es estable. Todas las raíces están dentro del círculo unidad.

Nota: El polinomio característico puede ser reescrito en función de sus raíces:

$$F(z) = (z - 0{,}8)(z + 0{,}5)(z - 0{,}5)(z - 0{,}4)$$

Puede observarse que todas las raíces están dentro del círculo unidad del plano z.

Ejercicio 2

Examinar la estabilidad del sistema dado por la siguiente ecuación característica:

$$F(z) = z^3 - 1{,}1z^2 - 0{,}1z + 0{,}2 = 0$$

Solución

Aplicamos el criterio de Jury y se tienen que satisfacer las siguientes condiciones:
1. $a_n > |a_0|$: En este caso: $a_3 > |a_0|, \;\; 1 > |0{,}2|$
2. $F(1) > 0$: $F(1) = 1 - 1{,}1 - 0{,}1 + 0{,}2 = 0$
Esto indica que existe al menos una raíz en $z = 1$. Por lo tanto, el sistema es como mucho críticamente estable.
3. $(-1)^n F(-1) > 0$:
$(-1)^3 F(-1) = (-1)(-1 - 1{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2) = (-1)(-1{,}8) = 1{,}8 > 0$
4. Construimos la tabla de estabilidad de Jury:

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	a_0	a_1	a_2	a_3
2	a_3	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \qquad n = 3$$

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0.2	-0.1	-1.1	**1**
2	1	-1.1	-0.1	**0.2**
3	**-0.96**	b_1	**-0.12**	

Aplicando los criterios de estabilidad:

$$|b_0| > |b_2| \quad |-0{,}96| > |-0{,}12|$$

La cuarta condición del Criterio de Jury se cumple.

Se puede concluir que el sistema tiene una única raíz en el círculo unitario $(z = 1)$ y las otras dos están en su interior. El sistema es críticamente estable.

Ejercicio 3

Examinar la estabilidad del sistema dado por la siguiente ecuación característica:

$$F(z) = z^3 - 1{,}3z^2 - 0{,}08z + 0{,}24 = 0$$

Solución

Aplicamos el criterio de Jury y se tienen que satisfacer las siguientes condiciones:
1. $a_n > |a_0|$: En este caso: $a_3 > |a_0|\,, \;\; 1 > |0{,}24|$
2. $F(1) > 0$: $F(1) = 1 - 1{,}3 - 0{,}08 + 0{,}24 = -0{,}14 < 0$
La segunda condición no se cumple, por lo que concluimos que el sistema es inestable.

Ejercicio 4

Examinar la estabilidad del sistema dado por la siguiente ecuación característica:

$$F(z) = z^3 - 1{,}3z^2 - 0{,}08z + 0{,}24 = 0$$

Solución

Primero hay que resolver la realimentación para obtener la función de transferencia en bucle cerrado, que es la que nos da al polinomio característico $\left(\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}\right)$.

$$\frac{\frac{K(0{,}3679z+0{,}2642)}{(z-0{,}3679)(z-1)}}{1+\frac{K(0{,}3679z+0{,}2642)}{(z-0{,}3679)(z-1)}} = \frac{K(0{,}3679z+0{,}2642)}{(z-0{,}3679)(z-1)+K(0{,}3679z+0{,}2642)} =$$

$$= \frac{K(0{,}3679z+0{,}2642)}{z^2+(0{,}3679K-1{,}3679)z+(0{,}3679+0{,}2642K)}$$

El polinomio característico que define la estabilidad del sistema es:

$$P(z) = z^2 + (0{,}3679K - 1{,}3679)z + (0{,}3679 + 0{,}2642K)$$

Aplicamos el criterio de Jury y se tienen que satisfacer las siguientes condiciones:

1. $a_n > |a_0|$: En este caso: $a_2 > |a_0|$, $1 > |0{,}3679 + 0{,}2642K|$

$$0{,}3679 + 0{,}2642K < 1, \quad 0{,}3679 + 0{,}2642K > -1$$

$$-5{,}1775 < K < 2{,}3925$$

2. $F(1) > 0$:
$F(1) = 1 + 0{,}3679K - 1{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}2642K = 0{,}6321K > 0$

$$K > 0$$

3. $(-1)^n F(-1) > 0$: $(-1)^2 F(-1) =$
$1 - 0{,}3679K + 1{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}2642K = -0{,}1037K + 2{,}7358 > 0$

$$0{,}1037K < 2{,}7358 \quad K < 26{,}3819$$

Como el polinomio es de segundo grado, la Tabla de Jury tiene sólo una fila. Los valores de K para los que el sistema es estable son aquellos para los que las tres condiciones son satisfechas: $0 < K < 2{,}3925$

Teniendo en cuenta el sistema descrito por la siguiente expresión:

$$y(k) - 0{,}6y(k-1) - 0{,}81y(k-2) + 0{,}67y(k-3) - 0{,}12y(k-4) = x(k)$$

En este sistema $y(k)$ es la salida y $x(k)$ es la entrada. Determinar la estabilidad del sistema.

Solución

Primero aplicamos la transformada z para obtener la función de transferencia equivalente:

$$Y(z) - 0{,}6z^{-1}Y(z) - 0{,}81z^{-2}Y(z) + 0{,}67z^{-3}Y(z) - 0{,}12z^{-4}Y(z) = X(z)$$
$$Y(z)(1 - 0{,}6z^{-1} - 0{,}81z^{-2} + 0{,}67z^{-3} - 0{,}12z^{-4}) = X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 - 0{,}6z^{-1} - 0{,}81z^{-2} + 0{,}67z^{-3} - 0{,}12z^{-4})} = \frac{z^4}{z^4 - 0{,}6z^3 - 0{,}81z^2 + 0{,}67z - 0{,}12}$$

El polinomio característico del sistema es el siguiente:

$$P(z) = z^4 - 0{,}6z^3 - 0{,}81z^2 + 0{,}67z - 0{,}12$$

Aplicamos el Criterio de Jury:
1. $a_n > |a_0|$: En este caso: $a_4 > |a_0|$, $1 > |-0{,}12|$
2. $F(1) > 0$: $F(1) = 1 - 0{,}6 - 0{,}81 + 0{,}67 - 0{,}12 = 0{,}14 > 0$
3. $(-1)^n F(-1) > 0$: $(-1)^4 F(-1) = 1 + 0{,}6 - 0{,}81 - 0{,}67 - 0{,}12 = 0$
Esto indica que existe al menos una raíz en $z = -1$. Por lo tanto, el sistema es como mucho críticamente estable.

4. Construimos la tabla de estabilidad de Jury:

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
2	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	
4	b_3	b_2	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2		

Ejercicio 5 (2/2)

Siendo:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_4 & a_k \end{vmatrix} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad n = 4$$

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.12	0.67	-0.81	-0.6	**1**
2	1	-0.6	-0.81	0.67	**-0.12**
3	-0.9856	0.5156	0.9072	-0.5980	
4	-0.5980	0.9072	0.5196	-0.9856	
5	**0.6138**	c_1	**-0.5834**		

En este caso, la tabla sería:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_4 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}12 & 1 \\ 1 & -0{,}12 \end{vmatrix} = -0{,}9856$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}12 & 0{,}67 \\ 1 & -0{,}6 \end{vmatrix} = -0{,}5980$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ b_3 & b_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}9856 & -0{,}5980 \\ -0{,}5980 & -0{,}9856 \end{vmatrix} = 0{,}6138$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}9856 & 0{,}5196 \\ -0{,}5980 & 0{,}9072 \end{vmatrix} = -0{,}5834$$

Aplicando los criterios de estabilidad:

$$|b_0| > |b_3| \quad |-0{,}9856| > |-0{,}5980|$$

$$|c_0| > |c_2| \quad |0{,}6138| > |-0{,}5834|$$

Se puede concluir que el sistema tiene una única raíz en el círculo unitario ($z = -1$). El sistema es críticamente estable.

Obtener el lugar de las raíces y la ganancia crítica para el sistema cuya función de transferencia viene dada por la siguiente expresión:

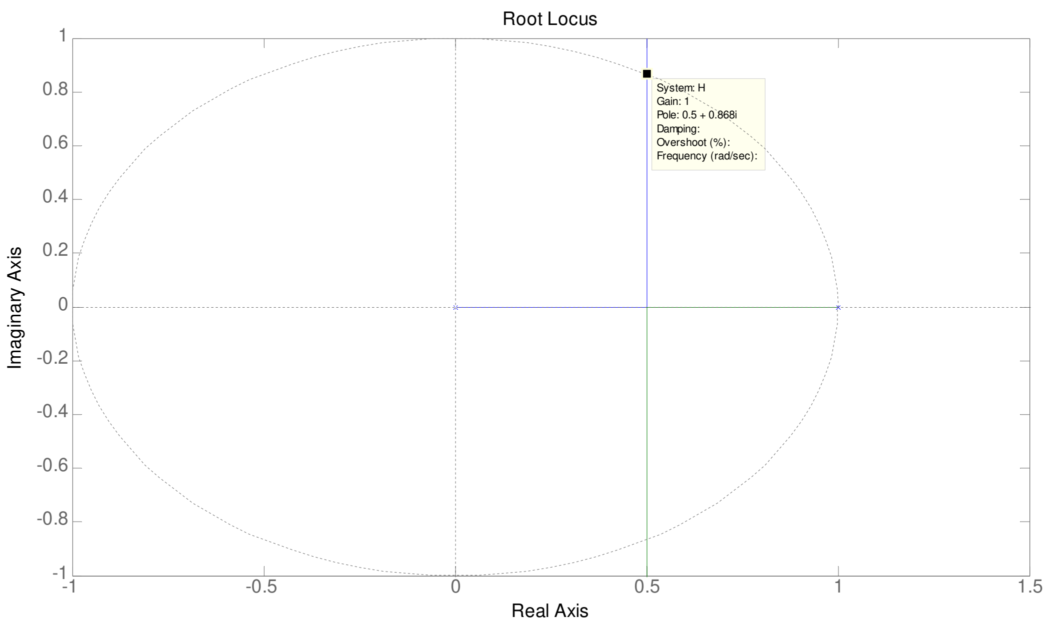
$$G(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

Solución

Dibujamos el lugar de las raíces aplicando las reglas dadas. Se comentan sólo las reglas con resultados significativos.

1. Número de ramas: 2
4. Asíntota: $\gamma = (1+2k)\pi/(n_p - n_z) = \pi/2, 3\pi/2$
5. Corte de las asíntotas: $z_0 = (0+1)/2 = 0{,}5$

El lugar de las raíces queda representado en la siguiente figura:



Ejercicio 6 (2/2)

Vamos ahora a calcular el valor de K crítico, para lo cual escribimos la ecuación característica:

$$(z-1)z+K=z^2-z+K=0$$

Para toda ecuación cuadrática de la forma: $ax^2+bx+c=0$ de raíces x_1, x_2 se cumple que $x_1 * x_2 = c/a$.
El módulo al cuadrado de dos números complejos conjugados situados en el círculo unitario es igual a:

$$|z|^2 = z * \bar{z} = 1$$

En el círculo unitario los polos son complejos conjugados tienen módulo igual a uno. Como también son raíces de la ecuación de segundo grado la siguiente ecuación se cumple:

$$|z_{1,2}|^2 = K_{cr} = 1$$

donde K_{cr} es la ganancia crítica. La ganancia crítica es igual a uno y los polos conjugados son los siguientes:

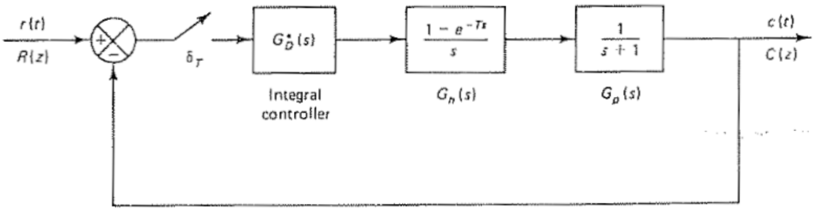
$$z_1 = 0{,}5 + j0{,}868 \quad z_2 = 0{,}5 - j0{,}868$$

Ejercicio 7 (1/5)

Dibujar el lugar de las raíces para el sistema con controlador digital de la figura teniendo en cuenta que la función de transferencia del controlador viene dada por la siguiente expresión:

$$G_D(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} = \frac{Kz}{z - 1}$$

Estudiar la estabilidad en función de K para periodos de 0.5 y 1 segundos. Calcular los polos del sistema para K=2 en los dos casos.



Solución

Primero hay que calcular la función equivalente discreta del sistema.

$$Z\left[G_b(s)G_p(s)\right] = Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s+1}\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = ?$$

$$= (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}}\right) = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

Teniendo en cuenta el controlador, la función de transferencia equivalente discreta es la siguiente:

$$G(z) = \frac{Kz}{z-1}\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

Como es un sistema con realimentación unitaria, la ecuación característica del sistema es:

$$1 + G(z) = 1 + \frac{Kz}{z-1}\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} = 0$$

Ejercicio 7 (2/5)

Caso 1: T=0.5sg

$$G(z) = \frac{0,3935Kz}{(z-1)(z-0,6065)}$$

Dibujamos el lugar de las raíces aplicando las reglas dadas. Se comentan sólo las reglas con resultados significativos.
1. Número de ramas: 2
4. Asíntota: $\gamma = (1+2k)\pi/(n_p - n_z) = 180^o$□
6. Puntos de dispersión: Primero se pone K en función de z:

$$K = \frac{(z-1)(z-0,6065)}{0,3935z} = \frac{z^2 - 1,6065z + 0,6065}{0,3935z}$$

Derivando e igualando a cero se obtienen los puntos de dispersión:

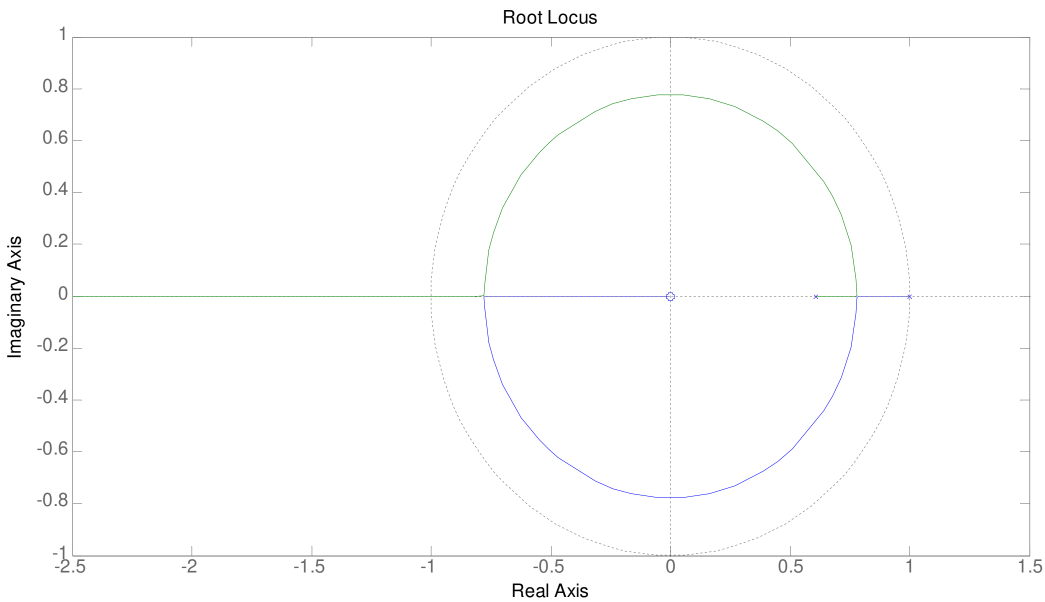
$$\frac{dK}{dz} = \frac{dK}{dz}\left(\frac{z^2 - 1,6065z + 0,6065}{0,3935z}\right) = \frac{-z^2 - 0,6065}{0,3935z^2} = 0$$
$$z = \pm 0,7788$$

Substituyendo z obtenemos los valores de la K:

$$z = 0,7788 \quad \rightarrow \quad K = 0,1244$$
$$z = -0,7788 \quad \rightarrow \quad K = 8,041$$

El primero es el punto de dispersión y el segundo el de confluencia.

El lugar de las raíces queda representado en la siguiente figura:



Ejercicio 7 (3/5)

10. Vamos ahora a calcular el valor de K crítico, para lo que aplicamos el criterio del módulo.

$$|K| = \left| \frac{|z-1|\left|z-e^{-T}\right|}{|z|\left|1-e^{-T}\right|} \right|$$

En este caso:

$$|K| = \left| \frac{|z-1|\,|z-0{,}6065|}{|z|\,|0{,}3935|} \right|$$

La ganancia crítica corresponde al punto $z=-1$. Si substituimos en la ecuación anterior:

$$|K| = \left| \frac{|-2|\,|-1{,}6065|}{|-1|\,|0{,}3935|} \right| = 8{,}165$$

Para ganancias mayores el sistema será inestable.
Finalmente, para K=2, la ecuación característica es:

$$z^2 + (0{,}3935K - 1{,}6065)z + 0{,}6065 = 0$$
$$z^2 - 0{,}8195z + 0{,}6065 = 0$$

Despejando, los polos quedan en:

$$z_1 = 0{,}4098 + j0{,}6623 \quad z_2 = 0{,}4098 - j0{,}6623$$

Caso 2: T=1sg

En este caso, la función de transferencia será:

$$G(z) = \frac{0{,}6321Kz}{(z-1)(z-0{,}3679)}$$

Dibujamos el lugar de las raíces aplicando las reglas dadas. Se comentan sólo las reglas con resultados significativos.

6. Puntos de dispersión: Primero se pone K en función de z:

$$K = \frac{(z-1)(z-0{,}3679)}{0{,}6321z} = \frac{z^2-1{,}3679z+0{,}3679}{0{,}6321z}$$

Derivando e igualando a cero se obtienen los puntos de dispersión:

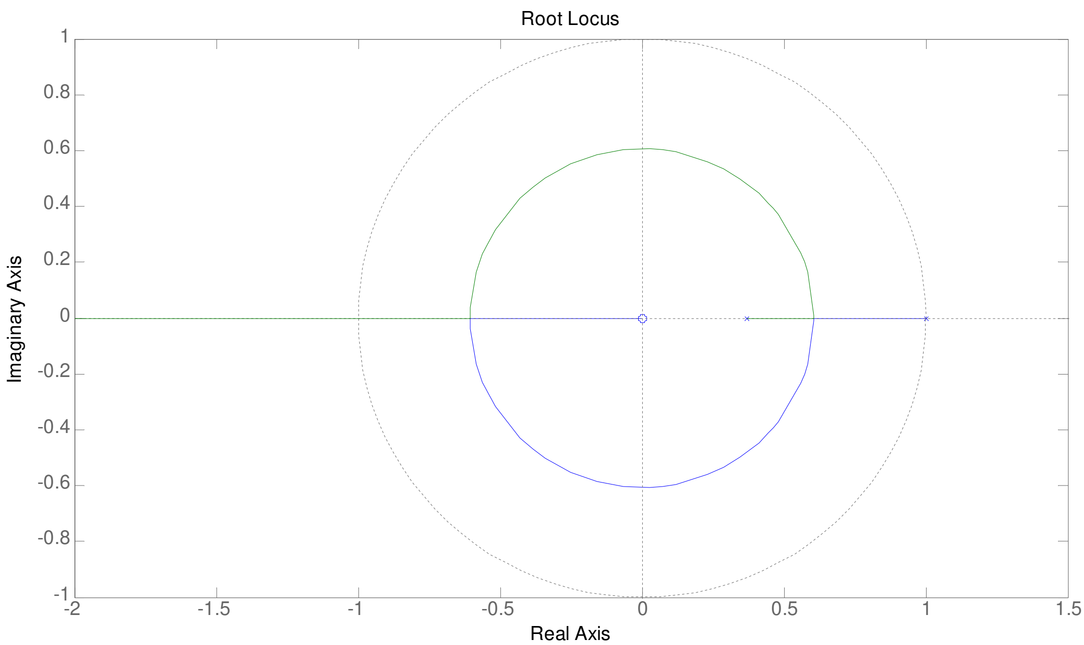
$$\frac{dK}{dz} = \frac{dK}{dx}\left(\frac{z^2-1{,}3679z+0{,}3679}{0{,}6321z}\right) = \frac{-z^2-0{,}3679}{0{,}6321z^2} = 0$$
$$z = \pm 0{,}6065$$

Substituyendo z obtenemos los valores de la K:

$$z = 0{,}6065 \quad \rightarrow \quad K = 0{,}2449$$
$$z = -0{,}6065 \quad \rightarrow \quad K = 4{,}083$$

El primero es el punto de dispersión y el segundo el de confluencia.

El lugar de las raíces queda representado en la siguiente figura:



10. Vamos ahora a calcular el valor de K crítico, para lo que aplicamos el criterio del módulo:

$$|K| = \left| \frac{|z-1|\,|z-0{,}3679|}{|z|\,|0{,}6321|} \right|$$

La ganancia crítica corresponde al punto $z=-1$. Si substituimos en la ecuación anterior:

$$|K| = \left| \frac{|-2|\,|-1{,}3679|}{|-1|\,|0{,}6321|} \right| = 4{,}328$$

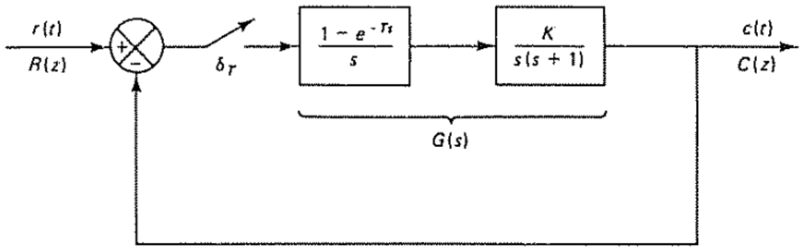
Para ganancias mayores el sistema será inestable.
Finalmente, para K=2 los polos estarán, la ecuación característica es:

$$z^2 + (0{,}6321K - 1{,}3679)z + 0{,}3679 = 0$$
$$z^2 - 0{,}1037z + 0{,}3679 = 0$$

Despejando, los polos quedan en:

$$z_1 = 0{,}05185 + j0{,}6043 \quad z_2 = 0{,}05185 - j0{,}6043$$

Dibujar el lugar de las raíces para el sistema digital de la figura.



Estudiar la estabilidad en función de K para periodos de 1, 2 y 4 segundos.

Solución

Primero hay que calcular la función equivalente discreta del sistema (El equivalente discreto de esta expresión ya se calculó en el primer problema de la unidad 2, y de ahí tomamos el resultado).

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2(s+1)}\right] =?$$
$$= \frac{K[(T-1+e^{-T})z^{-1} + (1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-2}]}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$$

Como es un sistema con realimentación unitaria, la ecuación característica del sistema es:

$$1+G(z) = 1 + \frac{K[(T-1+e^{-T})z^{-1} + (1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-2}]}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} = 0$$

Caso 1: T=1s

$$G(z) = \frac{0{,}3679K(z+0{,}7181)}{(z-1)(z-0{,}3679)}$$

Dibujamos el lugar de las raíces aplicando las reglas dadas. Se comentan sólo las reglas con resultados significativos.

1. Número de ramas: 2
4. Asíntota: $\gamma = (1+2k)\pi/(n_p - n_z) = 180º$□
6. Puntos de dispersión: Primero se pone K en función de z:

$$K = \frac{(z-1)(z-0{,}3679)}{0{,}3679(z+0{,}7181)} = \frac{z^2-1{,}3679z+0{,}3679}{0{,}3679(z+0{,}7181)}$$

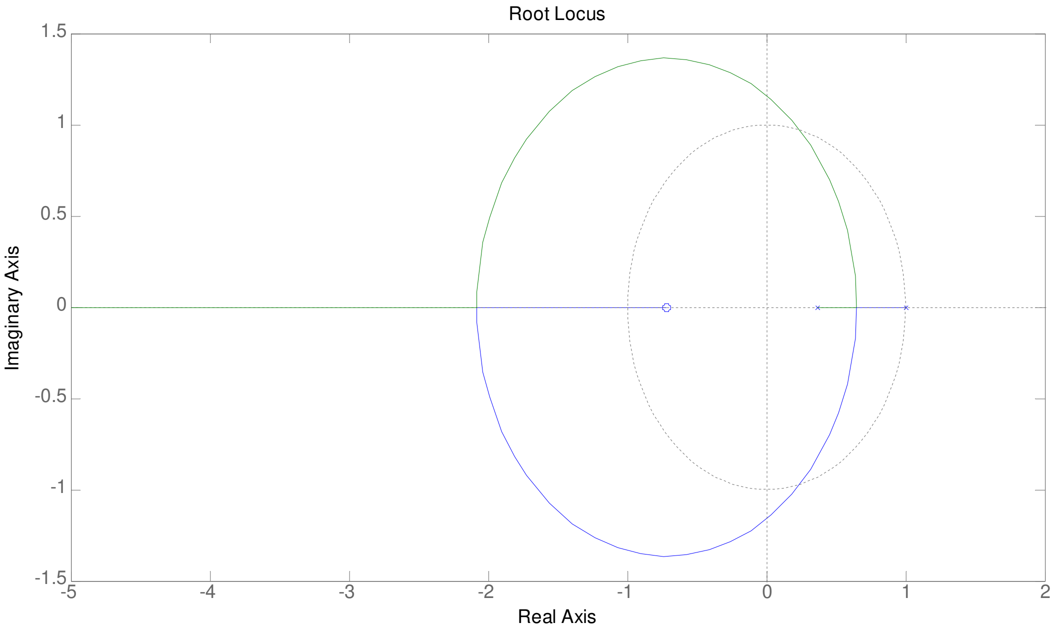
Derivando e igualando a cero se obtienen los puntos de dispersión:

$$\frac{dK}{dz} = \frac{dK}{dx}\left(\frac{z^2-1{,}3679z+0{,}3679}{0{,}3679(z+0{,}7181)}\right) = 0$$

$$\frac{z^2+1{,}4362z-1{,}3502}{0{,}3679(z+0{,}7181)^2} = 0$$

$$z_1 = 0{,}6479 \quad z_2 = -2{,}0841$$

El primero es el punto de dispersión y el segundo el de confluencia. El lugar de las raíces queda representado en la siguiente figura:



Vamos ahora a calcular el valor de K crítico, para lo que calculamos la ecuación característica:

$$1 + G(z) = 1 + \frac{0{,}3679K(z + 0{,}7181)}{(z-1)(z-0{,}3679)} = \\ = \frac{(z-1)(z-0{,}3679) + 0{,}3679K(z+0{,}7181)}{(z-1)(z-0{,}3679)} = 0$$

$$z^2 + (0{,}3679K - 1{,}3679)z + 0{,}3679(1 + 0{,}7181K) = 0$$

Para toda ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ de raíces x_1, x_2 se cumple que $x_1 * x_2 = c/a$.
El módulo al cuadrado de dos números complejos conjugados es igual a:

$$|z|^2 = z * \bar{z} = 1$$

En el círculo unitario los polos son complejos conjugados con módulo igual a uno. Como también son raíces de la ecuación de segundo grado la siguiente ecuación se cumple:

$$|z_{1,2}|^2 = 0{,}3679(1 + 0{,}7181K_{cr}) = 1$$

La ganancia crítica corresponde a:

$$K = 2{,}3925$$

Para ganancias mayores el sistema será inestable.

Se puede calcular de otra forma: sabemos que la ganancia crítica corresponde a dos polos complejos situados sobre el círculo unidad, luego su modulo será igual a uno. Una forma sería dar valores a la K hasta encontrar los polos deseados, aumentándola o disminuyéndola en función del valor del módulo de los polos resultantes.

$$K = 2 \rightarrow \quad z^2 - 0.6321z + 0.8963 = 0 \quad z_{1,2} = 0.3161 \pm j0.8924 \quad |z_{1,2}| = 0.9467$$

$$K = 3 \rightarrow \quad z^2 - 0.2642z + 1.1605 = 0 \quad z_{1,2} = 0.1321 \pm j1.0691 \quad |z_{1,2}| = 1.0773$$

$$K = 2.3925 \rightarrow \quad z^2 - 0.4877z + 1 = 0 \quad z_{1,2} = 0.2438 \pm j0.9698 \quad |z_{1,2}| = 1$$

Caso 2: T=2s

En este caso, la función de transferencia será:

$$G(z) = \frac{1{,}1353K(z + 0{,}5232)}{(z - 1)(z - 0{,}1353)}$$

Dibujamos el lugar de las raíces aplicando las reglas dadas. Se comentan sólo las reglas con resultados significativos.

6. Puntos de dispersión: Primero se pone K en función de z:

$$K = \frac{(z - 1)(z - 0{,}1353)}{1{,}1353(z + 0{,}5232)} = \frac{z^2 - 1{,}1353z + 0{,}1353}{1{,}1353(z + 0{,}5232)}$$

Derivando e igualando a cero se obtienen los puntos de dispersión:

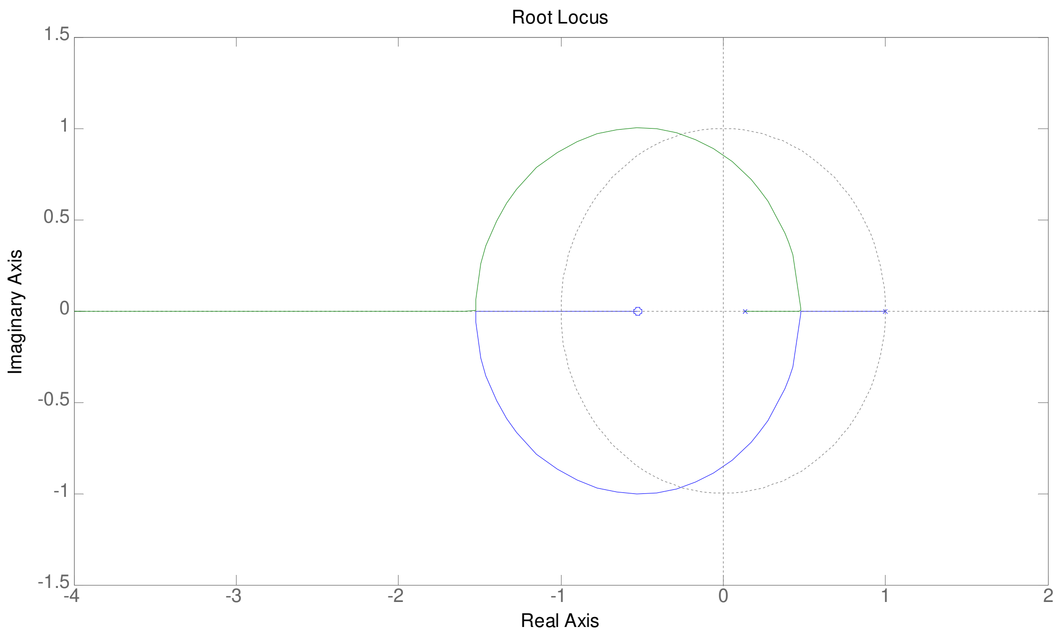
$$\frac{dK}{dz} = \frac{dK}{dx}\left(\frac{z^2 - 1{,}1353z + 0{,}1353}{1{,}1353(z + 0{,}5232)}\right) = 0$$

$$\frac{z^2 + 1{,}0464z - 0{,}7287}{1{,}1353(z + 0{,}5232)^2} = 0$$

$$z_1 = 0{,}4780 \quad z_2 = -1{,}5244$$

El primero es el punto de dispersión y el segundo el de confluencia.

El lugar de las raíces queda representado en la siguiente figura:



Ejercicio 8 (5/7)

Vamos ahora a calcular el valor de K crítico, para lo que calculamos la ecuación característica:

$$1+G(z) = 1+\frac{1{,}1353K(z+0{,}5232)}{(z-1)(z-0{,}1353)} = \frac{(z-1)(z-0{,}1353)+1{,}1353K(z+0{,}5232)}{(z-1)(z-0{,}1353)}$$

$$z^2 + 1{,}1353(K-1)z + 1{,}1353 * 0{,}5232K + 0{,}1353 = 0$$

$$|z_{1,2}|^2 = 1{,}1353 * 0{,}5232K_{cr} + 0{,}1353 = 1$$

La ganancia crítica corresponde a:

$$K = 1{,}4557$$

Para ganancias mayores el sistema será inestable.

Calculándolo de la otra manera:

$K = 2 \rightarrow$	$z^2 + 1.1353z + 1.3233 = 0$	$z_{1,2} = -0.5676 \pm j1.0005$	$\lvert z_{1,2}\rvert = 1.1503$
$K = 1 \rightarrow$	$z^2 + 0.7293 = 0$	$z_{1,2} = \pm j0.8540$	$\lvert z_{1,2}\rvert = 0.8540$
$K = 1.4557 \rightarrow$	$z^2 + 0.5174z + 1 = 0$	$z_{1,2} = 0.2587 \pm j0.9660$	$\lvert z_{1,2}\rvert = 1$

Caso 3: T=4 s

En este caso, la función de transferencia será:

$$G(z) = \frac{3{,}0183K(z+0{,}3010)}{(z-1)(z-0{,}0183)}$$

Dibujamos el lugar de las raíces aplicando las reglas dadas. Se comentan sólo las reglas con resultados significativos.

6. Puntos de dispersión: Primero se pone K en función de z:

$$K = \frac{(z-1)(z-0{,}0183)}{3{,}0183(z+0{,}3010)} = \frac{z^2-1{,}0183z+0{,}0183}{3{,}0183(z+0{,}3010)}$$

Derivando e igualando a cero se obtienen los puntos de dispersión:

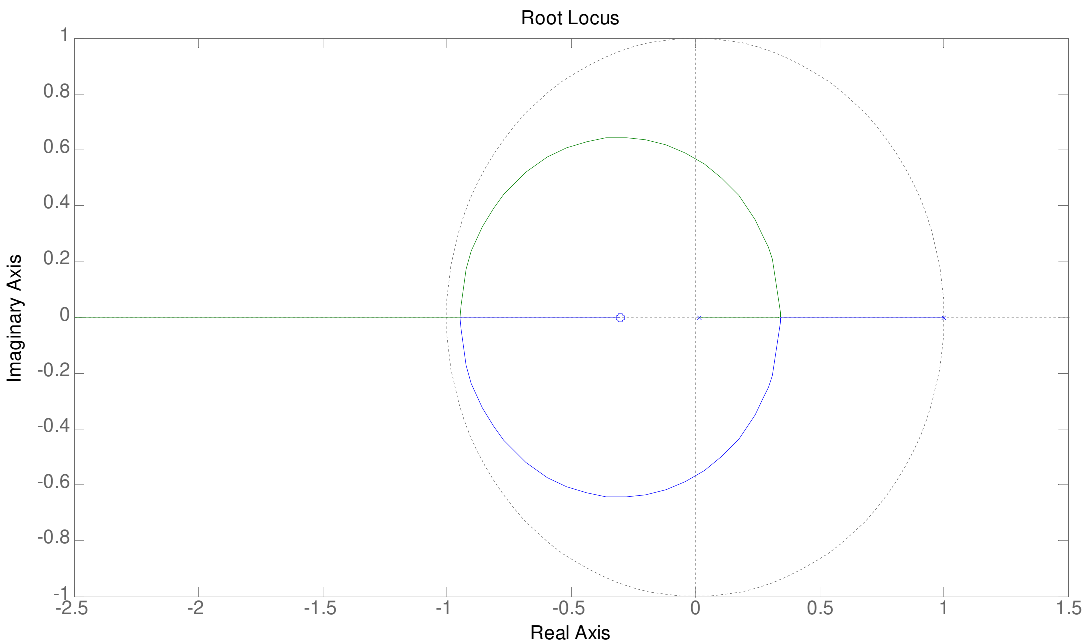
$$\frac{dK}{dz} = \frac{dK}{dx}\left(\frac{z^2-1{,}0183z+0{,}0183}{3{,}0183(z+0{,}3010)}\right) = 0$$

$$\frac{z^2+0{,}602z-0{,}3248}{3{,}0183(z+0{,}3010)^2} = 0$$

$$z_1 = 0{,}3435 \quad z_2 = -0{,}9455$$

El primero es el punto de dispersión y el segundo el de confluencia.

El lugar de las raíces queda representado en la siguiente figura:



Ejercicio 8 (7/7)

Vamos ahora a calcular el valor de K crítico, para lo que calculamos la ecuación característica:

$$1+G(z) = 1+\frac{3{,}0183K(z+0{,}3010)}{(z-1)(z-0{,}0183)} = \frac{(z-1)(z-0{,}0183)+3{,}0183K(z+0{,}301}{(z-1)(z-0{,}0183)}$$

$$z^2 + (3{,}0183K - 1{,}0183)z + 3{,}0183 * 0{,}3010K + 0{,}0183 = 0$$

En este caso se usa el criterio del módulo, pues no son polos complejos conjugados:

$$|K| = \left|\frac{|z-1|\,|z-0{,}0183|}{|z+0{,}3010|\,|3{,}0183|}\right|$$

La ganancia crítica corresponde al punto $z = -1$. Si substituimos en la ecuación anterior:

$$|K| = \left|\frac{|-2|\,|-1{,}0183|}{|-1+0{,}3010|\,|3{,}0183|}\right| = 0{,}9653$$

La ganancia crítica corresponde a:

$$K = 0{,}9653$$

Para ganancias mayores el sistema será inestable.
Substituyendo en la ecuación característica, los polos a ganancia crítica son:

$$z_1 = -1 \quad z_2 = -0{,}8953$$

Nota: En el caso de tener dudas sobre si los polos a ganancia crítica son o no complejos conjugados, siempre se puede substituir el valor de la ganancia crítica obtenida en la ecuación característica y comprobar si los resultados obtenidos son válidos.