Ingeniería de Control II

Tema 4:
Discretización de los sistemas de tiempo continuo

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno S. Garrido

2025

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Obtener G(z) como la suma de los residuos para la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Solución

Hay que tener en cuenta que la expresión tiene un polo doble en el 0 y otro simple en el -1, por lo que hay que calcular los dos residuos:

$$G(z) = R_0 + R_{-1}$$

$$R_0 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{\lim\limits_{p\to 0} d}{dp}\left[\frac{1}{(p+1)(1-e^{-T(s-p)})}\right] = \lim_{p\to 0}.$$

$$= \frac{(-1)(1-e^{-Ts}-e^{-Ts}T)}{(1-e^{-Ts})^2} \underset{z=e^{sT}}{=} \frac{(-1)(1-z^{-1}-Tz^{-1})}{(1-z^{-1})^2} = \frac{(-z)(z-1-T)}{(z-1)^2}$$

$$R_{-1} = \lim_{p\to -1}\left[\frac{1}{p^2[1-e^{-T(s-p)}]}\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}e^{-T}} \underset{z=e^{sT}}{=} \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$G(z) = \frac{-z(z-T-1)}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{(T-1+e^{-T})z^2 + (1-e^{-T}-Te^{-T})z}{(z-1)^2(z-e^{-T})}$$

$$G(z) = \frac{(T-1+e^{-T})z^{-1} + (1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-2}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-T}z^{-1})}$$

Ejercicio 2

Obtener la transformada z de la siguiente función mediante la expansión en fracciones parciales y utilizando el método de los residuos:

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)}$$

Solución

a) Primero expandimos en fracciones parciales y calculamos los coeficientes:

$$X(s) = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \left[(s+1)^2 X(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{s}{(s+2)}\Big|_{s=-1} = -1$$

$$B = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 X(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s}{(s+2)}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{2}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$C = [(s+2)X(s)]|_{s=-2} = \frac{s}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2} = -2$$

$$X(s) = \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{s+2}$$

Como las transformadas z de estas funciones son conocidas, escribimos el resultado:

$$X(z) = \frac{-Te^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2} + 2\left(\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) - 2\left(\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}\right)$$

$$X(z) = \frac{2-2e^{-T}z^{-1} - Te^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2} - \frac{2}{1-e^{-2T}z^{-1}}$$

b) Utilizamos ahora el método de los residuos:

$$X(z) = R_{-1} + R_{-2}$$

$$R_{-1} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{\lim_{p\to -1} d}{dp}\left[\frac{p}{(p+2)[1-e^{-T(s-p)}]}\right] = ?$$

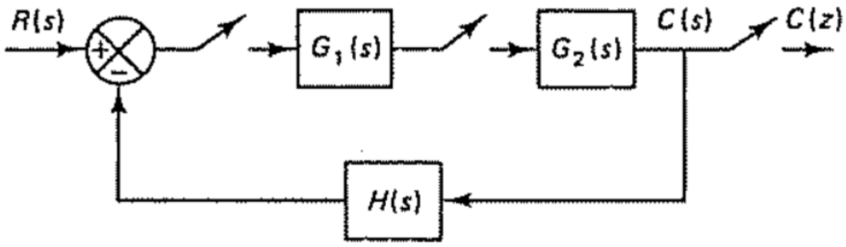
$$= \lim_{p\to -1}.$$

$$R_{-2} = \lim_{p\to -2}\left[\frac{p}{(p+1)^2(1-e^{-T(s-p)})}\right] = \frac{-2}{1-e^{-Ts}e^{-2T}} = \frac{-2z}{z-e^{-2T}}$$

$$X(z) = \frac{2-2e^{-T}z^{-1} - Te^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2} - \frac{2}{1-e^{-2T}z^{-1}}$$

Ejercicio 3

Obtener la función de transferencia equivalente del siguiente sistema:



Solución

En este caso obtenemos las siguientes ecuaciones del diagrama de bloques:

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$
$$C(s) = G_2(s)U^*(s)$$
$$U(s) = G_1(s)E^*(s)$$

Hemos llamado U a la señal que sale del bloque G_1.
Substituyendo:

$$E(s) = R(s) - H(s)G_2(s)U^*(s)$$

Tomando las variables muestreadas:

$$U^*(s) = G_1^*(s)E^*(s)$$
$$E^*(s) = R^*(s) - G_2H^*(s)U^*(s) = R^*(s) - G_2H^*(s)G_1^*(s)E^*(s)$$
$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G_1^*(s)G_2H^*(s)}$$

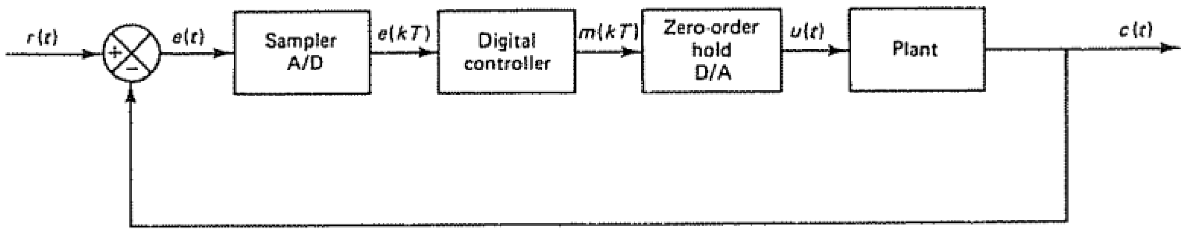
Como: $C^*(s) = G_2^*(s)U^*(s) = G_2^*(s)G_1^*(s)E^*(s)$

$$C^*(s) = \frac{G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s)}{1 + G_1^*(s)G_2H^*(s)}$$
$$C(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$$

La solución será:

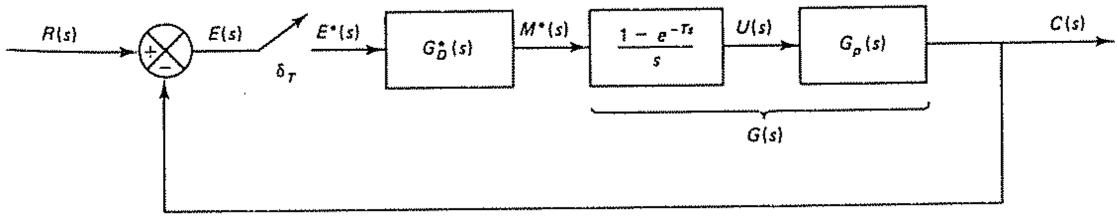
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$$

Calcular la función de transferencia equivalente del sistema de control digital representado en la siguiente figura:



Solución

El sistema está compuesto por un conversor analógico-digital, un controlador digital, un bloqueador de orden cero y la planta. Si tenemos en cuenta las funciones de transferencia del sistema:



La función de transferencia del controlador digital es $G_D^*(s)$, y la función de transferencia incluyendo el bloqueador de orden cero es:

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)$$

De la figura sacamos las siguientes relaciones:

$$C(s) = G(s)G_D^*(s)E^*(s)$$
$$C^*(s) = G^*(s)G_D^*(s)E^*(s)$$
$$C(z) = G(z)G_D(z)E(z)$$

Como: $E(z) = R(z) - C(z)$
Tenemos: $C(z) = G_D(z)G(z)[R(z) - C(z)]$
Finalmente:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}$$

Ejercicio 5

Aproximar la función de transferencia en z para la siguiente función utilizando los métodos Euler I, Euler II y Trapezoidal:

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

Solución

$$G_e(z) = G(z)|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{\frac{z-1}{T}}{\left(\frac{z-1}{T}+1\right)^2} = \frac{T(z-1)}{(z+T-1)^2}$$

Euler II:

$$G_e(z) = G(z)|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{\frac{z-1}{Tz}}{\left(\frac{z-1}{Tz}+1\right)^2} = \frac{Tz(z-1)}{[z(1+T)-1]^2}$$

Trapezoidal:

$$G_e(z) = G(z)|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = \frac{\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+1\right)^2} = \frac{2T(z^2-1)}{[z(T+2)-(T-2)]^2}$$