

Ingeniería de Control II

Tema 4: Discretización de un sistema en tiempo continuo

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido,

2025



Contenido

- 1 Discretización de un sistema en tiempo continuo
- 2 Función de transferencia discreta equivalente
- 3 Función de transferencia muestreada de un lazo de control típico

Discretización de un sistema en tiempo continuo

- Una señal muestreada se podía expresar como:

$$\begin{aligned}x^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta(t - kT) \\&= x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\end{aligned}\tag{1}$$

- La transformada de Laplace de un impulso es la unidad. Un retardo a en una señal en el tiempo equivale, en el campo de Laplace, a multiplicar por e^{-as} . Si hacemos la transformada de Laplace del sumatorio de la ecuación 1, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right] &= \mathcal{L}[\delta(t)] + \mathcal{L}[\delta(t - T)] + \mathcal{L}[\delta(t - 2T)] + \dots \\&= 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots \\&= \frac{1}{1 - e^{-Ts}}\end{aligned}\tag{2}$$

Discretización de un sistema en tiempo continuo

- Haciendo la transformada de Laplace de la señal muestreada $x^*(t)$ tenemos

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}[x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)] \quad (3)$$

- Se ve que $X^*(s)$ es la transformada de Laplace del producto de dos funciones en el dominio del tiempo. Recordando que la transformada de Laplace del producto de dos funciones tiene la siguiente expresión

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-st}dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)dp \quad (4)$$

- Aplicándolo a la ecuación 3 y teniendo en cuenta que las transformadas de Laplace de $x(t)$ es $X(s)$ y la del sumatorio de impulsos de Dirac es la de la expresión 2, resulta la siguiente expresión de la integral de convolución:

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \quad (5)$$

Discretización de un sistema en tiempo continuo

- Hemos obtenido la transformada de Laplace de la señal muestreada

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \quad (6)$$

- La evaluación de esta integral de convolución a lo largo de la línea $c - j\infty$ a $c + j\infty$ puede realizarse por el método de los residuos formando un contorno cerrado consistente en la propia línea $c - j\infty$ a $c + j\infty$ y un círculo Γ de radio infinito en el semiplano izquierdo que incluya todos los polos de $X(p)$.

Discretización de un sistema en tiempo continuo

- De esta forma la ecuación 6 se podrá expresar como

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \\ &\quad - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \end{aligned} \quad (7)$$

- En el caso de que $X(s)$ este expresado por una expresión polinómica $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ en la que el grado del denominador sea mayor que el del numerador, el segundo término de la expresión 7 se hace cero. Y de aquí que

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \quad (8)$$

Discretización de un sistema en tiempo continuo

- Esta integral se resuelve aplicando la fórmula integral de Cauchy y es igual a la suma de los residuos R en el contorno cerrado para los polos de $X(p)$, es decir

$$X^*(s) = \sum R \left[X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} \right]_{p=p_i} \quad (9)$$

- Las expresiones para el círculo de los residuos son las siguientes:
 - Polos simples ($p = p_i$).
Para este caso el residuo del polo es

$$R_{p_i} = \lim_{p \rightarrow p_i} \left[(p - p_i) \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} \right] \quad (10)$$

- Polos múltiples ($p = p_j$, con orden de multiplicidad n).
Para este caso el residuo del polo con orden de multiplicidad n es

$$R_{p_j} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[(p - p_j)^n \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} \right] \quad (11)$$

Discretización de un sistema en tiempo continuo

Ejemplo

- Supongamos un sistema con función de transferencia $G(s) = \frac{2}{(s+2)}$. En este caso tenemos un residuo:

$$\begin{aligned} R_{p_i=-2} &= \lim_{p \rightarrow -2} \left[(p+2) \frac{\frac{2}{(p+2)}}{1 - e^{-T(s-p)}} \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{2}{1 - e^{-T(s-p)}} = \frac{2}{1 - e^{-Ts}e^{-2T}} \end{aligned}$$

por tanto

$$G^*(s) = \frac{2}{1 - e^{-Ts}e^{-2T}} \quad (12)$$

y teniendo en cuenta que $z = e^{Ts}$, obtenemos la transformada en z :

$$G(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}e^{-2T}} \quad (13)$$

Discretización de un sistema en tiempo continuo

Ejemplo (Cont.)

- Si suponemos que el periodo de muestreo es de 0,1, segundos la transformada z de la señal $G(s)$ muestreada toma el siguiente valor:

$$G(z) = \frac{2}{1 - 0,8187z^{-1}} \quad (14)$$

Discretización de un sistema en tiempo continuo

Ejemplo (Cont.)

Curvas de respuesta en el dominio del tiempo de las señales $G(s)$ y $G(z)$ sin bloqueador.

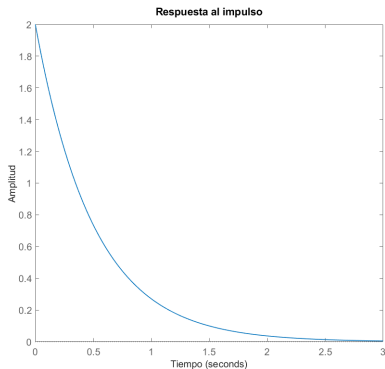


Figura 1: Respuesta de $G(s)$.

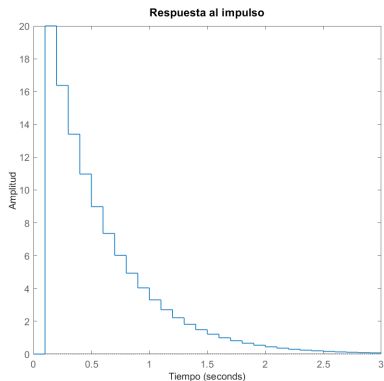


Figura 2: Respuesta de $G(z)$.

Discretización de un sistema en tiempo continuo

Ejemplo (Cont.)

Curvas de respuesta en el dominio del tiempo de las señales $G(s)$ y $G(z)$ con bloqueador.

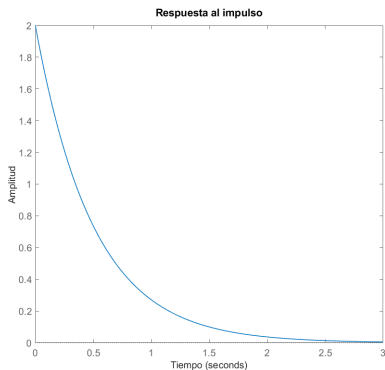


Figura 3: Respuesta de $G(s)$.

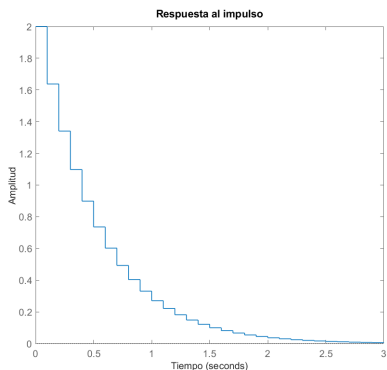


Figura 4: Respuesta de $G(z)$.

Función de transferencia discreta equivalente

- Supongamos ahora que para un cierto sistema conocemos su función de transferencia continua y que nos interesa conocer su **equivalente en tiempo discreto**.
- Este sistema discreto equivalente debe tener la entrada discreta y la salida discreta. Para ello, y puesto que el sistema real es continuo, se introduce un bloqueador de señal en la entrada del sistema y un muestreador a la salida del mismo, tal y como se ve en la figura:

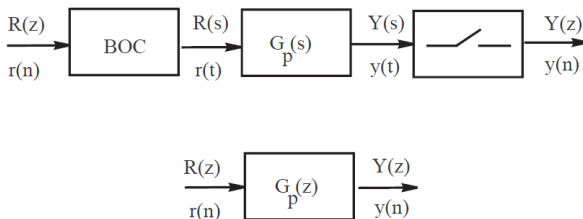


Figura 5: Función de transferencia discreta equivalente.

Función de transferencia discreta equivalente

- Veamos qué ecuaciones tenemos en el sistema. En primer lugar habíamos visto que la ecuación del bloqueador de orden cero era

$$G_B(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

De aquí tenemos que el conjunto bloqueador-proceso tendrá la siguiente función de transferencia en el campo de Laplace:

$$G(s) = G_B(s)G_p(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \quad (15)$$

Función de transferencia discreta equivalente

- Por otra parte tenemos que la señal de entrada al sistema es una señal muestreada $R^*(s)$, por lo que a la salida del proceso tendremos

$$Y(s) = G(s)R^*(s) \quad (16)$$

Si muestreamos esta señal $Y(s)$ para obtener a la salida del sistema una señal discreta, la expresión nos queda de la siguiente forma:

$$Y^*(s) = G^*(s)R^*(s) \quad (17)$$

que en forma discreta queda como:

$$Y(z) = G(z)R(z) \quad (18)$$

Función de transferencia discreta equivalente

- Buscamos obtener la función de transferencia muestreada $G^*(s)$ donde

$$G(s) = G_B(s)G_p(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)$$

Operando con esta función de transferencia tenemos que

$$G(s) = \frac{G_p(s)}{s} - \frac{e^{-Ts}G_p(s)}{s}$$

es decir, tenemos la respuesta de $G_p(s)$ ante entrada escalón unitario $\frac{G_p(s)}{s}$ menos esta misma respuesta retardada T . Si hacemos la transformada z para esta $G(s)$, tendremos que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[G(s)] &= \mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)}{s} - \frac{e^{-Ts}G_p(s)}{s}\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] - \mathcal{Z}\left[\frac{e^{-Ts}G_p(s)}{s}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]\end{aligned}\tag{19}$$

Ejemplo 1

- Supongamos un sistema cuya función de transferencia en tiempo continuo viene dada por $G_p(s) = \frac{3}{(s+1)}$, y se desea obtener el equivalente discreto del sistema.

- **Solución:**

- Suponiendo que se utiliza un bloqueador de orden cero tendremos que:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G_p(s)}{s} \right]$$

Veamos en primer lugar la transformada z de $\frac{G_p(s)}{s}$, para lo que utilizaremos el método de los residuos. En este caso tenemos dos polos para la función, por lo que tendremos dos residuos:

$$\begin{aligned} R_{p_i=-1} &= \lim_{p \rightarrow -1} \left[(p+1) \frac{\frac{3}{p(p+1)}}{1 - e^{-T(s-p)}} \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{-3}{1 - e^{-T(s-p)}} = \frac{-3}{1 - e^{-Ts} e^{-T}} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Solución (Cont.)

- Para el segundo polo:

$$\begin{aligned}R_{p_i=0} &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{\frac{3}{p(p+1)}}{1 - e^{-T(s-p)}} \right] \\&= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{3}{1 - e^{-T(s-p)}} \\&= \frac{3}{1 - e^{-Ts}}\end{aligned}$$

y substituyendo e^{Ts} por z tendremos que

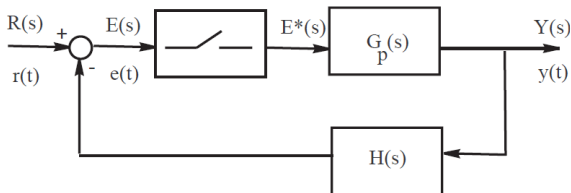
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left(\frac{3}{1 - z^{-1}} - \frac{3}{1 - z^{-1}e^{-T}} \right) \quad (20)$$

- Si suponemos que el periodo de muestreo es de 0,1 segundos, la transformada z del sistema tomará el siguiente valor:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left(\frac{3}{1 - z^{-1}} - \frac{3}{1 - 0,3678z^{-1}} \right) \quad (21)$$

Función de transferencia muestreada de un lazo de control típico

- Consideremos ahora un bucle o lazo de control típico en el que se muestrea la señal de error.



Podemos ver que

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E^*(s)$$

y de aquí

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s)$$

Función de transferencia muestreada de un lazo de control típico

- Si muestreamos la señal de error continua, obtenemos que

$$E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s)$$

y despejando

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

- Como $Y^*(s) = G^*(s)E^*(s)$, se tiene que

$$Y^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

- De esta expresión, y reescribiéndola en términos de la transformada z , llegamos a la siguiente expresión

$$Y(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$$

Función de transferencia muestreada de un lazo de control típico

- Por tanto, la función de transferencia muestreada para un ciclo de control típico será

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad (22)$$

Función de transferencia de un control por computador

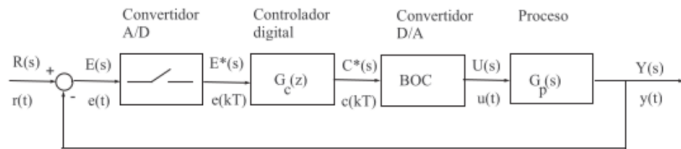


Figura 6: Lazo de un control por computador.

- Tenemos que la ecuación del bloqueador de orden cero es

$$G_B(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

y el conjunto bloqueador-proceso tiene la siguiente función de transferencia en el campo de Laplace

$$G(s) = G_B(s)G_p(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \quad (23)$$

Función de transferencia de un control por computador

- La señal de salida del sistema será

$$Y(s) = G(s)G_c^*(s)E^*(s) \quad (24)$$

o

$$Y^*(s) = G^*(s)G_c^*(s)E^*(s) \quad (25)$$

que expresada en términos de transformada z quedará

$$Y(z) = G(z)G_c(z)E(z) \quad (26)$$

- Además del muestreo de la señal de error, tenemos que

$$E(z) = R(z) - Y(z) \quad (27)$$

luego

$$Y(z) = G(z)G_c(z)E(z) = G(z)G_c(z)[R(z) - Y(z)] \quad (28)$$

Función de transferencia de un control por computador

- De aquí se obtiene que la función de transferencia del lazo de control con muestro de señal de error y bloqueo de la señal de control del regulador es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)} \quad (29)$$

donde $G(s)$ incluye al proceso y al bloqueador de orden cero.

Discretización de un controlador analógico

- La relación entre la transformada de Laplace de un sistema muestreado y la transformada z , venía dada por la expresión $z = e^{Ts}$.
- Esta relación no es una expresión racional, por lo que no hay una forma fácil e inmediata de obtener el equivalente discreto de un cierto sistema continuo.
- Es necesario obtener los equivalentes discretos de $G_p(s)$ y de $G_c(s)$, lo cual es un proceso laborioso.
- Es frecuente que no dispongamos de la función de transferencia del proceso $G_p(s)$, aunque tengamos la del controlador analógico ajustado empíricamente $G_c(s)$.
- En este tipo de situaciones interesa discretizar únicamente el controlador y es frecuente utilizar técnicas aproximadas, aunque estas sirven para discretizar cualquier función de transferencia.

- Existen diferentes enfoques para realizar esta transformación de una forma rápida y simple (aunque no exacta).
- En general se suelen utilizar técnicas basadas en **aproximaciones numéricas** de la ecuación diferencial que representa la función de transferencia del controlador en tiempo continuo $G_c(s)$. Existen dos técnicas básicas:
 - La integración numérica (es la más usada).
 - La diferenciación numérica.

Aproximación numérica de la integral

- En un controlador en tiempo continuo como

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \quad (30)$$

esta expresión corresponde a una integración de la forma

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t e(t) dt \quad (31)$$

- Las aproximaciones numéricas a esta expresión se basan en aproximar la integral de la señal de error por un sumatorio de rectángulos o trapezoides, tal y como se muestra en la figura.

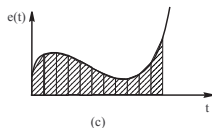
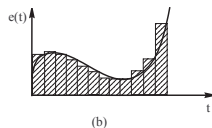
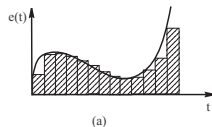


Figura 8:
Aproximaciones.

Aproximación numérica de la integral

Método de Euler I

- El área bajo la integral se aproxima por un rectángulo de base el periodo T y altura el valor de la señal de error en el instante n .

$$u(n+1) = u(n) + Te(n) \quad (32)$$

Haciendo la transformada z de esta ecuación tenemos

$$zU(z) = U(z) + TE(z) \quad (33)$$

y por lo tanto

$$G_e(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1} \quad (34)$$

- Si comparamos esta expresión 34 con la del controlador analógico 30, se puede observar que, para obtener el equivalente discreto con este método, basta con sustituir en la función de transferencia del controlador analógico cada s por $\frac{z-1}{T}$:

$$G_e(z) = G_c(s)|_{s=\frac{z-1}{T}} \quad (35)$$

Aproximación numérica de la integral

Método de Euler II

- El área bajo la integral se aproxima por un rectángulo de base el periodo T y altura el valor de la señal de error en el instante $k + 1$.

$$u(k + 1) = u(k) + Te(k + 1) \quad (36)$$

Haciendo la transformada z de esta ecuación tenemos

$$zU(z) = U(z) + TzE(z) \quad (37)$$

y por lo tanto

$$G_e(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Tz}{z - 1} \quad (38)$$

- Comparando esta expresión 38 con la del controlador analógico 30, se puede observar que para obtener el equivalente discreto con este método, basta con sustituir en $G_c(s)$ s por $\frac{z-1}{Tz}$:

$$G_e(z) = G_c(s)|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \quad (39)$$

Aproximación numérica de la integral

Método trapezoidal

- También se le conoce como **método de Tustin** o **transformación bilineal**. El área bajo la integral se aproxima promediando los valores de la señal de error en los instantes k y $k + 1$ y multiplicando por el periodo T .

$$u(k + 1) = u(k) + \frac{T}{2}[e(k) + e(k + 1)] \quad (40)$$

Haciendo la transformada z de esta ecuación tenemos

$$(z - 1)U(z) = \frac{T}{2}(z + 1)E(z) \quad (41)$$

y por lo tanto

$$G_e(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T(z + 1)}{2(z - 1)} \quad (42)$$

- Y comparando se puede observar que basta con sustituir en $G_c(s)$ cada s por $\frac{2(z-1)}{T(z+1)}$:

$$G_e(z) = G_c(s)|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \quad (43)$$

Ejemplo 2

- Supongamos que se ha diseñado un controlador analógico por métodos clásicos para un cierto sistema, y que la función de transferencia en s de dicho sistema es

$$G_c(s) = \frac{s + 4}{s(s + 1)}. \quad (44)$$

- Solución: Aplicando la transformación bilineal tendríamos que la $G_e(z)$ del regulador discreto equivalente será

$$G_e(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{(z + 1)[z(1 + 2T) + (2T - 1)]T}{(z - 1)[z(T + 2) + (T - 2)]} \quad (45)$$

Estructura del controlador discretizado

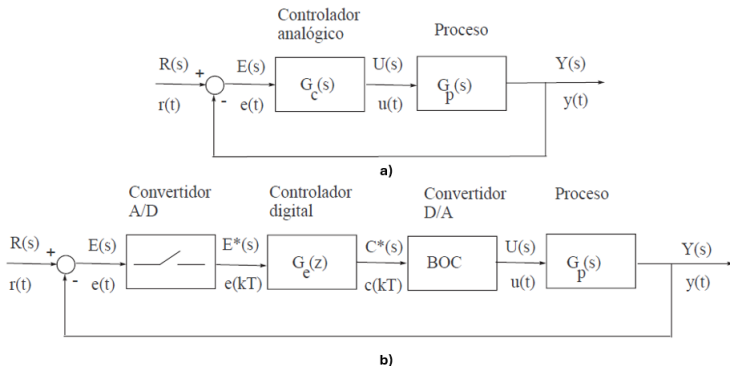


Figura 9: Estructura del control continuo a) y equivalente discreto del sistema b).