

Ingeniería de Control II

Tema 5: Controladores PID en tiempo discreto

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido,

2025



- 1 Controladores PID en tiempo discreto
- 2 Estructura de un controlador PID discreto real

- **Controlador con estructura fija.** Utilizan una función de transferencia definida a priori. Dentro de este grupo se incluyen los **controladores PID**. En estos la función de transferencia del controlador es fija.
- **Controlador con estructura variable.** Este segundo grupo de controladores no presenta una estructura de función de transferencia predefinida, ésta se obtiene como resultado de las especificaciones deseadas para el sistema y de la función de transferencia del proceso a controlar. Este es el caso del diseño de controladores mediante la técnica de **síntesis directa**.

Especificaciones

Dominio del tiempo

- Expresan las características que se desean alcanzar en el sistema. Pueden expresarse de diferentes formas utilizando para ello el dominio de la frecuencia o el dominio del tiempo.
- Las especificaciones respecto a la respuesta en el dominio del tiempo de un sistema se suelen definir con respecto a la respuesta temporal ante una **entrada en escalón de un sistema de segundo orden**. Para ello se toma como sistema de referencia un sistema con función de transferencia teórica:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

cuya respuesta a un escalón es

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} + \phi) \quad (2)$$

con

$$\phi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \quad (3)$$

Especificaciones

Dominio del tiempo

- Este sistema tiene sus polos situados en

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (4)$$

donde ξ es la llamada *tasa de amortiguamiento* y ω_n es la *frecuencia natural no amortiguada* del sistema. Para un sistema con tasa de amortiguamiento $0 < \xi \leq 1$ (sistema subamortiguado), la curva de respuesta del sistema tiene la forma:

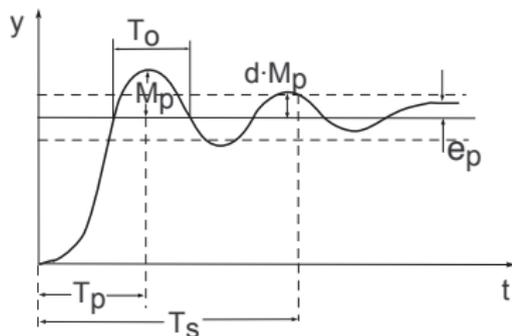


Figura 1: Respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado.

Entre los parámetros para especificar la respuesta tenemos los siguientes:

- *Tiempo de pico:*

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

donde ω_d es la frecuencia amortiguada $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$.

- *Tasa de decaimiento:*

$$d = e^{-2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- *Periodo de la oscilación amortiguada:*

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

- *Sobreoscilación:*

$$M_p = e^{-\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \sqrt{d}$$

- *Tiempo de establecimiento.*

$$T_s \simeq \frac{\pi}{\xi \omega_n}$$

- Error de posición ante escalón en régimen permanente, e_p .

Discretización de un regulador PID

- Hoy en día, la mayoría de los controladores son de tipo discreto, por lo que resulta necesario discretizar el regulador para poderlo implantar.
- La ecuación diferencial de un controlador PID tenía la forma

$$u(t) = K[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}]$$

- El término derivativo podemos sustituirlo por la diferencia de primer orden y el término integral podríamos aproximarlo por el primero de los métodos de Euler (aproximación rectangular hacia adelante).

$$u(k) = K[e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1))]$$

Discretización de un regulador PID

Forma recursiva

- Para obtener una expresión recursiva que evite el sumatorio, se obtiene la expresión para $k - 1$

$$u(k - 1) = K[e(k - 1) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-2} e(i) + \frac{T_d}{T} (e(k - 1) - e(k - 2))]$$

- Restando obtenemos la expresión del controlador PID discretizado

$$u(k) = u(k - 1) + [q_0 e(k) + q_1 e(k - 1) + q_2 e(k - 2)]$$

donde

$$q_0 = K \left(1 + \frac{T_d}{T} \right)$$

$$q_1 = -K \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} - \frac{T}{T_i} \right)$$

$$q_2 = K \frac{T_d}{T}$$

Discretización de un regulador PID

Función de transferencia discreta

- La función de transferencia en z queda de la forma

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Discretización de un regulador PID

Trapezoidal

- Si se hubiese aproximado la integral mediante la aproximación trapezoidal, la expresión de $u(k)$ sería

$$u(k) = K \left[e(k) + \frac{T}{T_i} \left(\frac{e(0) + e(k)}{2} \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \right]$$

- y el controlador quedaría

$$u(k) = u(k-1) + [q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)]$$

donde

$$q_0 = K \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{2T_i} \right)$$

$$q_1 = -K \left(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{2T_i} \right)$$

$$q_2 = K \frac{T_d}{T}$$

Ejemplo

Discretización de un regulador PID

- Supongamos que se ha diseñado un controlador PID continuo con parámetros $K = 2$, $T_d = 5$, $T_i = 50$ que se desea discretizar con un periodo de muestreo de $T = 1$ segundos.
- Utilizando la integración rectangular hacia adelante, los parámetros que resultan para el controlador son

$$\begin{aligned}q_0 &= K \left(1 + \frac{T_d}{T} \right) = 12 \\q_1 &= -K \left(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{T_i} \right) = -21,96 \\q_2 &= K \frac{T_d}{T} = 10\end{aligned}\tag{5}$$

Ejemplo

Discretización de un regulador PID

- Si se utiliza la integración trapezoidal, los parámetros serán:

$$q_0 = K \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{2T_i} \right) = 12,02$$

$$q_1 = -K \left(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{2T_i} \right) = -21,80 \quad (6)$$

$$q_2 = K \frac{T_d}{T} = 10$$

- Otra solución a la discretización de reguladores *PID* es utilizar el **teorema de los residuos** con un **bloqueador de orden cero** y un **muestreador** de periodo T

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \sum_{\text{Polos dentro de C}} \text{Res} \left(\frac{G(s)}{s} \frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right)$$

- La función de transferencia de este bloqueador es

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

cuyo numerador equivalente en el plano z es $(1 - z^{-1})$.

Discretización de un regulador

Ejemplo

- Supongamos que queremos discretizar el regulador continuo

$$G_c(s) = 9,86 \frac{s + 2}{s + 3,14}$$

- Para discretizar este regulador es necesario elegir el tiempo de muestreo y posteriormente discretizarlo. Para la elección del tiempo de muestreo T utilizaremos el método empírico de $1/8$ del periodo de la respuesta amortiguada del sistema, que es el doble del tiempo de pico T_p .

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi}{3,14 \sqrt{1 - 0,5^2}} = 2,31$$

$$T = \frac{2,31}{8} = 0,28 \approx 0,2$$

Discretización de un regulador

Ejemplo (Cont.)

- El controlador discreto equivalente está representado en la figura

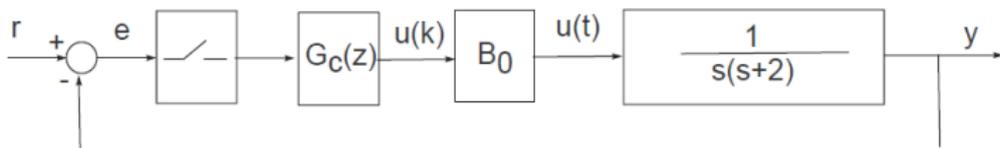


Figura 2: Estructura del lazo de control.

Discretización de un regulador

Ejemplo (Cont.)

- Para la obtención de $G_c(z)$ utilizaremos el método de discretización basado en el teorema de los residuos.

$$\begin{aligned}G_c(z) &= (1 - z^{-1}) \sum R \left[G_c(s) \frac{1}{s} \frac{1}{(1 - e^{pT} z^{-1})} \right] \\&= (1 - z^{-1}) \sum R \left[9,86 \frac{s+2}{(s+3,14)} \frac{1}{s} \frac{1}{(1 - e^{pT} z^{-1})} \right] \\&= (1 - z^{-1}) 9,86 \left[\frac{2}{3,14} \frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{1,14}{3,14} \frac{1}{(1 - e^{-3,14 \cdot 0,2} z^{-1})} \right] \\&= (1 - z^{-1}) \left[6,277 \frac{1}{(1 - z^{-1})} + 3,578 \frac{1}{(1 - 0,533 z^{-1})} \right] \\&= 6,277 + 3,578 \frac{(1 - z^{-1})}{(1 - 0,533 z^{-1})} = 9,855 \frac{z - 0,702}{z - 0,533}\end{aligned}$$

Discretización de un regulador

Ejemplo (Cont.)

- Las respuestas son semejantes, siendo la del regulador discreto un poco más oscilatoria, debido a que el tiempo de muestreo elegido es el máximo posible $T = 0,2$, a) continuo y b) discreto.

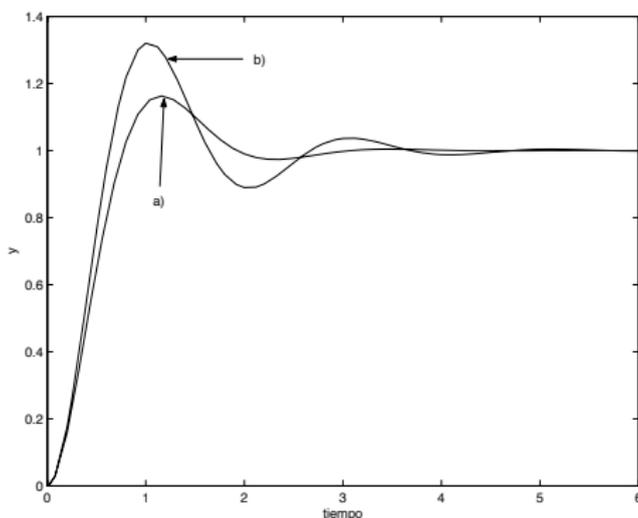


Figura 3: Respuesta del sistema controlado a) continuo y b) discreto.

Discretización de un regulador

Ejemplo (Cont.)

- Si el tiempo de muestreo se reduce, la respuesta mejora. Para $T = 0,05 \text{ seg}$, el regulador discreto será

$$G_c(z) = 9,86 \frac{z - 0,9073}{z - 0,8547}$$

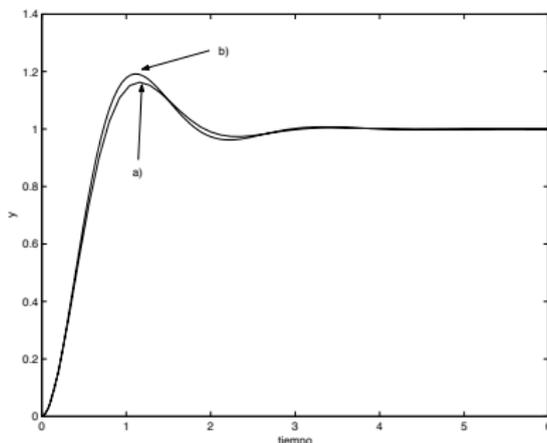
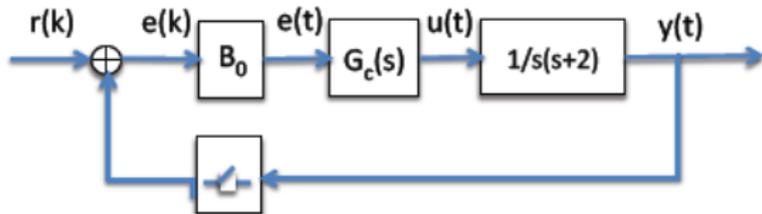


Figura 4: Respuesta del sistema controlado a) continuo y b) discreto.

Discretización del regulador y del proceso

Ejemplo (Cont.)

- Para el sistema y el regulador del ejemplo anterior, supongamos que también se quiere discretizar el sistema continuo a controlar con $T = 0,2 \text{ seg}$. Para ello, el bloqueador de orden cero cambia de posición.



Discretización del regulador y del proceso

Ejemplo (Cont.)

- Aplicando el método de discretización de los residuos al regulador y al sistema obtenemos

$$\begin{aligned}G_c G(z) &= (1 - z^{-1}) \sum R \left[G_c(s) G(s) \frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right] \\&= (1 - z^{-1}) \sum R \left[9,86 \frac{1}{s(s + 3,14)} \frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right] \\&= 9,86(1 - z^{-1}) \cdot \left[\frac{1}{(2 - 1)!} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2(s + 3,14)} \frac{1}{(1 - e^{pT} z^{-1})} \right]_{p=0} \right. \\&\quad \left. + \frac{1}{(-3,14)^2} \frac{1}{1 - e^{-3,14 \cdot 0,2} z^{-1}} \right]\end{aligned}$$

Discretización del regulador y del proceso

Ejemplo (Cont.)

- Nótese que el residuo correspondiente al polo múltiple en $s = 0$ solamente contiene la fracción correspondiente al mayor grado s^2 .

$$\begin{aligned}G_c G(z) &= 9,86(1 - z^{-1}) \cdot \left[\left[\frac{-(1 - e^{\rho T} z^{-1} + (s + 3,14)(-T)e^{\rho T} z^{-1})}{(s + 3,14)^2(1 - e^{\rho T} z^{-1})^2} \right]_{p=0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3,14^2} \frac{1}{(1 - 0,533z^{-1})} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{(1,628z^{-1} - 1)}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{1}{(1 - 0,533z^{-1})} \right] \\ &= \frac{(1,628z^{-1} - 1)(1 - 0,533z^{-1}) + (1 - z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})(1 - 0,533z^{-1})} = \\ &= 0,161 \frac{z + 0,8261}{(z - 1)(z - 0,533)}\end{aligned}$$

Discretización del regulador y del proceso

Ejemplo (Cont.)

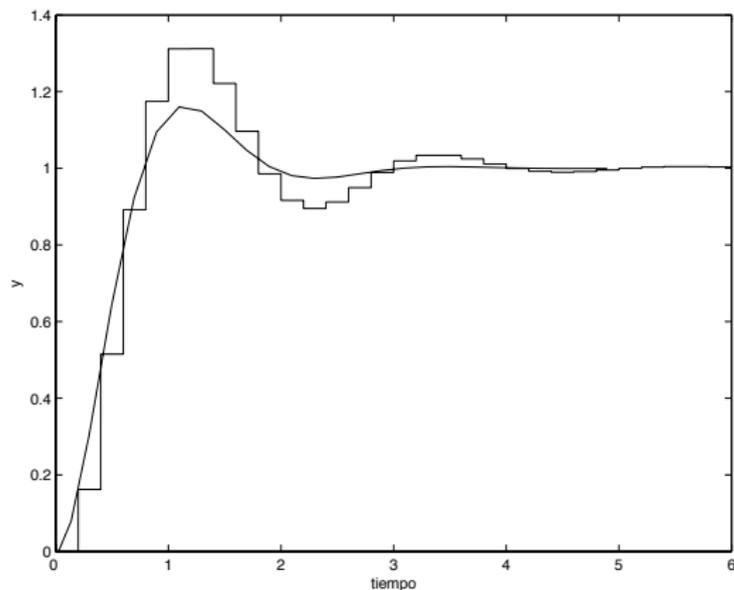


Figura 5: Resultados del sistema del ejemplo en bucle cerrado con el controlador en tiempo continuo y el controlador discreto equivalente

Determinación de la frecuencia de muestreo

- No existe una regla fija en cuanto a la frecuencia de muestreo más adecuada a la hora de implantar un controlador discreto (tiene que cumplir el teorema de muestreo).
- La elección del periodo de muestreo depende de:
 - las prestaciones que se desean alcanzar,
 - la dinámica del proceso,
 - el espectro de las perturbaciones,
 - el actuador,
 - el equipo de medida disponible
 - y el coste computacional, entre otros aspectos.
- Las prestaciones no varían sustancialmente a partir de un cierto periodo de muestreo y dado que muestrear con periodos muy pequeños suele encarecer el coste, debe de elegirse razonablemente.

Determinación de la frecuencia de muestreo

Reglas empíricas

- La dinámica del sistema tiene gran influencia sobre el tiempo de muestreo. En general, cuanto mayores son las constantes de tiempo, mayores pueden ser los periodos de muestreo.
- Dos posibles reglas empíricas de elección podrían ser:
 - Elegir el tiempo de muestreo de forma que este tiempo sea como máximo una décima parte de la menor constante de tiempo presente en el sistema.
 - Si el sistema tiene una respuesta del tipo de un sistema de segundo orden subamortiguada, se puede elegir el periodo de muestreo de forma que sea 8 veces menor que el periodo de la oscilación de la respuesta amortiguada del sistema.
 - Y si la respuesta es de segundo orden sobreamortiguada, el periodo se puede tomar 8 veces menor que el tiempo de subida del sistema.

Determinación de la frecuencia de muestreo

Ejemplo

- Si tenemos un sistema cuyos polos dominantes están situados en $p_{1-2} = -1,57 \pm 2,72j$, podríamos considerar como un periodo de muestreo aceptable T , según la primera de las reglas

$$T = \frac{1,57}{10} = 0,157$$

- y según la segunda regla, tendríamos que la respuesta amortiguada del sistema tendría un periodo $t_0 = 2\pi/w_d$, y para el caso que estamos considerando, $w_d = 2,72$, con lo que $t_0 = 2,31$:

$$T = \frac{t_0}{8} = \frac{2,31}{8} = 0,28$$

- Si promediamos entre ambos valores, para este sistema un periodo de muestreo razonable sería $T = 0,2$ segundos.

Determinación de la frecuencia de muestreo

Ejemplo

- Como se observa en la figura, las respuestas continua y muestreada con $T = 0,2$ segundos son muy similares.

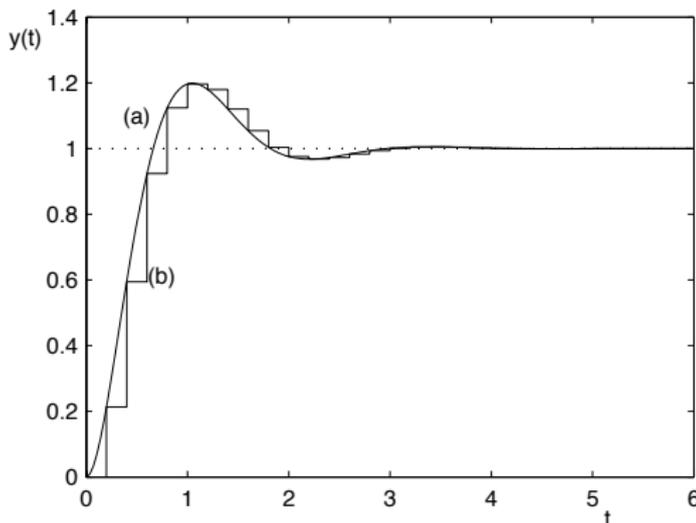


Figura 6: Respuesta del sistema, a) continua b) muestreada.

Diseño de controladores PID discretos

- Se han estudiado hasta ahora diversos métodos para el diseño de reguladores PID continuos, y como pueden discretizarse posteriormente.
- Es posible también hacer el diseño del controlador directamente en tiempo discreto. Esto requiere:
 - Obtener un equivalente discreto del sistema
 - Convertir las especificaciones temporales que se deseen para el sistema continuo en especificaciones definidas en el plano z discreto.
 - Normalmente las posiciones deseadas para los polos en cadena cerrada o al menos las de los polos dominantes.

Diseño de controladores PID discretos

Especificaciones en el plano z

- Si los polos deseados para el comportamiento del sistema continuo en cadena cerrada están definidos en el plano s , en las posiciones

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

- y la relación entre la transformada de Laplace y la transformada z venía dada por la relación $z = e^{Ts}$, los puntos en el plano s pasan al plano z como

$$z = \exp [T(-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})]$$

- Luego las posiciones de los polos en el plano z en cadena cerrada, para un cierto periodo de muestreo, tendrán el siguiente módulo y argumento

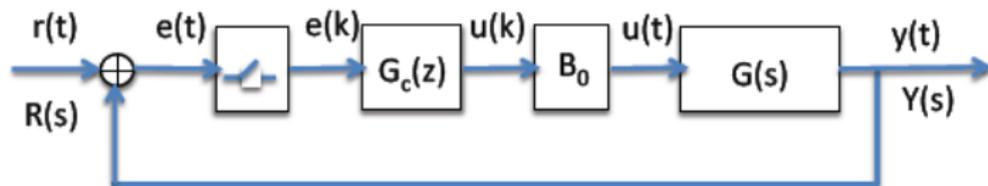
$$|z| = e^{-T\xi\omega_n}$$

$$\angle z = \pm T\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = \pm T\omega_d = \pm\theta$$

- Las técnicas de obtención de los parámetros de un regulador PID discreto que haga que el sistema cumpla unas ciertas especificaciones son básicamente las mismas que en el caso continuo.
- Para el método de diseño basado en el lugar de las raíces:
 - Las reglas de construcción del lugar de las raíces en el plano z son las mismas.
 - La estabilidad cambia, ya que la zona estable en el plano z es el círculo unidad.

Diseño de reguladores PID discretos

Método del lugar de las raíces



- La ecuación característica para un sistema como este es

$$1 + KG_c(z)G(z) = 0$$

la idea es añadir polos y ceros al lugar de las raíces mediante el regulador para desplazar las raíces de la ecuación característica en bucle cerrado hasta el punto deseado.

Diseño de reguladores PID discretos

Método del lugar de las raíces

- En la ecuación característica $1 + KG_c(z)G(z) = 0$ el término K se ha separado explícitamente para con su variación generar el lugar de las raíces, pero normalmente va incluido en el propio regulador.
- Un punto z_a está sobre el lugar de las raíces si verifica los criterios del módulo y argumento de la ecuación característica, es decir:

$$K = \frac{1}{|G_c(z_a)G(z_a)|}$$

$$\angle(G_c(z_a)G(z_a)) = \pm 180$$

- Dado que K varía desde cero a infinito, cualquier punto del plano corresponde a un valor de K , por lo que no determina su pertenencia al lugar. **La pertenencia al mismo viene determinada exclusivamente por la verificación del criterio del argumento.**

Diseño de reguladores PID discretos

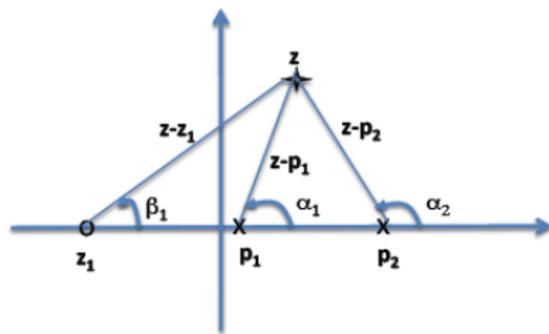
Comprobación de la pertenencia al lugar

- Supongamos el caso más simple en el que $G_c(z) = 1$ y

$$KG(z) = \frac{K(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

donde todos los polos y ceros son reales.

- Para este caso los criterios del módulo y argumento son



$$\beta_1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \pm 180$$

$$K = \frac{|z - p_1||z - p_2|}{|z - z_1|}$$

Diseño de reguladores PID discretos

Comprobación de la pertenencia al lugar

- Desde el punto de vista de diseño hay dos posibles casos:
 - Si se verifica que las especificaciones nos dan un punto que **pertenece al lugar de las raíces**, en este caso basta con un regulador proporcional (a falta de comprobar la especificación del error en régimen permanente). Con determinar cuál es el valor de K que corresponde a este punto quedaría calculado el regulador.
 - Si el punto deseado **no pertenece al lugar de las raíces**, esto indica que hay que aportar un cierto ángulo en el criterio del argumento. Dependiendo de si queremos mover el lugar hacia la derecha o hacia la izquierda, se introducirá un regulador u otro.

Método de los polos dominantes

Diseño mediante el lugar de las raíces

El **método del lugar de las raíces**, introducido por Evans en 1954, es un **método gráfico** para determinar las posiciones de los polos en cadena cerrada del sistema a partir de las posiciones de los polos y los ceros del sistema en cadena abierta.

- El dibujo del lugar de las raíces de un cierto sistema nos puede indicar:
 - Si es suficiente con variar la ganancia del sistema para alcanzar las especificaciones deseadas (en el caso de que el lugar de las raíces pase por las posiciones deseadas para los polos en cadena cerrada).
 - Si es necesario introducir en el sistema un controlador que modifique el lugar de las raíces en la forma adecuada para que pase por los polos dominantes que se desea que tenga el sistema.

Efecto de la adición de polos

- La adición de un polo a la función de transferencia en bucle abierto de un sistema tiene como efecto:
 - Añadir una rama más en el lugar de las raíces y como consecuencia las ramas tienden a acercarse o incluso introducirse en el semiplano real positivo.
 - Esto tiende a disminuir la estabilidad relativa del sistema y hace que el tiempo de establecimiento de la respuesta sea mayor.

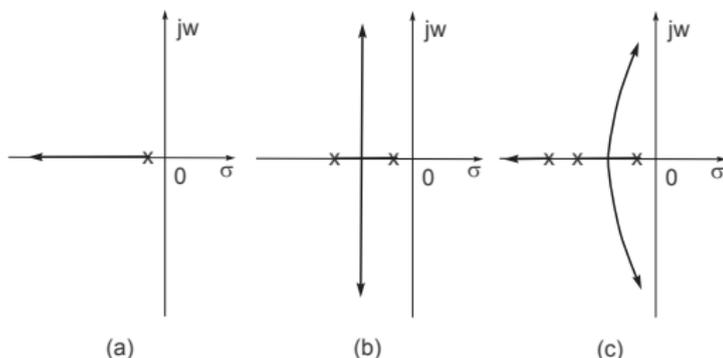


Figura 7: Efecto de la adición de polos.

Efecto de la adición de ceros

Lugar de las raíces

- La adición de un cero a la función de transferencia en cadena abierta:
 - Disminuye el número de ramas que se van al infinito por lo que **aumenta la estabilidad relativa** del sistema al desplazarse las ramas hacia la parte real negativa del plano complejo.
 - Hace al sistema **más rápido** en su respuesta al introducir un efecto derivativo que anticipa la evolución del sistema.
 - Amplifica el ruido a frecuencias altas.

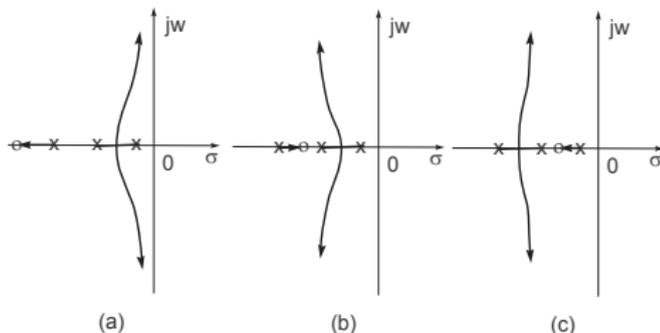


Figura 8: Efecto de la adición de ceros.

Diseño de reguladores PID discretos

Tipos de reguladores

- Regulador Proporcional (P)
- Regulador Proporcional-Derivativo (PD)
- Regulador Proporcional-Integral (PI)
- Regulador Proporcional-Integral-derivativo (PID)
- Regulador Lead-Lag (Adelanto-atraso de fase)(Regulador PD-Real)
- Regulador Lag-Lead (Atraso-edelanto de fase)(Regulador PI-Real)

Tipos de reguladores

Regulador P

- La acción de control del regulador es proporcional al error, y la función de transferencia es la más simple

$$G_c(z) = K$$

- Características:
 - La introducción de un regulador P genera el lugar de las raíces, modifica por tanto las posiciones de los polos en cadena cerrada.
 - **Modifica tanto la dinámica del sistema como el error en régimen permanente.** Si ajustamos los polos para una cierta respuesta transitoria, es necesario comprobar que el error en régimen permanente cumple las especificaciones.
 - Al modificar tanto el transitorio como el permanente, es difícil cumplir simultáneamente especificaciones en ambos aspectos de la respuesta.
 - Si el lugar de las raíces pasa por los polos deseados para la respuesta, es el primer tipo de regulador a intentar.

Tipos de reguladores

Regulador PD

- La acción de control del regulador es proporcional al error y a la derivada, y la función de transferencia tiene la forma

$$G_c(z) = K_p + K_d(1 - z^{-1}) = \frac{K(z - a)}{z}$$

es decir un polo en el origen en el plano z y un cero en a .

- Características:
 - Al introducir un polo y un cero aumenta en 1 el número de ramas, por lo que altera el lugar de las raíces.
 - La modificación que se introduce depende de lo próximo que esté el polo del cero en el origen.
 - Tiende a mejorar la dinámica, es decir, disminuye la sobreoscilación para el mismo tiempo de establecimiento.
 - No suele mejorar el régimen permanente, aunque esto depende de la posición de a .

Tipos de reguladores

Regulador PI

- La acción de control del regulador es proporcional al error y a la integral del error que **aproximada trapezoidalmente** da una función de transferencia que tiene la forma

$$G_c(z) = K_p + K_i \frac{(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})} = \frac{K(z - b)}{z - 1}$$

es decir, un polo en -1 y un cero en b .

- Características:
 - Aumenta el tipo del sistema en uno, por lo que elimina el error en régimen permanente para entrada escalón (si es que el sistema era de tipo cero).
 - Tiende a inestabilizar el sistema, ya que las ramas tienden a irse hacia la derecha y se salen del círculo unidad.

Tipos de reguladores

Regulador PID

- La acción de control del regulador es proporcional al error, a la derivada del error y a la integral del error que **aproximada trapezoidalmente** da una función de transferencia que tiene la forma

$$G_c(z) = K_p + K_d(1 - z^{-1}) + K_i \frac{(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})} = \frac{K(z - a)(z - b)}{z(z - 1)}$$

es decir, un polo en 1 y un cero en b .

- Características:
 - Aumenta el tipo del sistema en uno, por lo que elimina el error en régimen permanente para entrada escalón (si es que el sistema era de tipo cero).
 - El efecto derivativo tiende a mejorar el transitorio.

Diseño de reguladores PID discretos

Método del lugar de las raíces: Ejemplo

- Supongamos que se desea diseñar un controlador discreto para el sistema

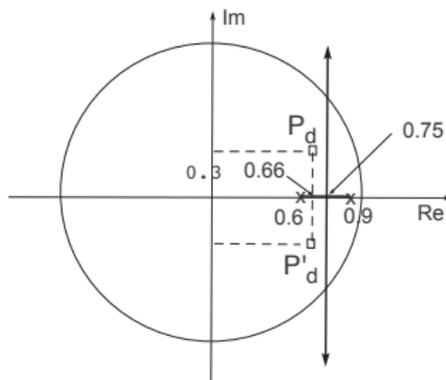


- de forma que verifique las siguientes especificaciones:
 - El sistema tenga los polos en cadena cerrada situados en las posiciones $p_{1,2} = 0,66 \pm j0,3$.
 - El error en régimen permanente sea nulo.

Diseño de reguladores PID discretos

Método del lugar de las raíces

- Si observamos el lugar de las raíces del sistema $1 + KG(z) = 0$ en el plano z , no pasa por las posiciones deseadas, P_d , para los polos. No basta un **regulador P**.



- Para anular el error en régimen permanente, y puesto que el sistema no tiene ninguno de sus polos sobre el círculo unidad (no tiene integradores), será necesario incluir un integrador en el controlador.
- Como es necesario modificar tanto la dinámica como el tipo del sistema, introduciremos un regulador de tipo PID.

Diseño de reguladores PID discretos

Método del lugar de las raíces

- La expresión genérica de un PID discreto tenía la forma

$$G_c(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z^1 + q_2}{z(z - 1)}$$

- Estamos introduciendo en el sistema **dos polos en $z = 1$ y $z = 0$** y **dos ceros** cuyas posiciones y ganancia es necesario determinar.
- Las especificaciones fijan las posiciones de dos polos en cadena cerrada, sólo podremos fijar los valores de dos de los parámetros del PID.
- Escogemos uno de los ceros del controlador de forma que cancela el polo situado en $z = 0,9$. Aplicando el criterio del modulo y el argumento a la expresión (se ha eliminado el polo y el cero que se cancelan) $1 + G_c(z)G(z) = 0$, queda:

$$1 + K \frac{4(z - a)}{z(z - 1)(z - 0,6)} = 0$$

Diseño de reguladores PID discretos

Método del lugar de las raíces

- Con los criterios del módulo y del argumento

$$|G_c(z)G(z)| = |K| \frac{\prod_{i=1}^m |z + z_i|}{\prod_{j=1}^n |z + p_j|} = 1$$

$$\angle G_c(z)G(z) = \angle K + \sum_{i=1}^m \angle(z + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z + p_j) = (2q + 1)\pi$$

podemos determinar los valores de K y de a que hacen que el lugar de las raíces pase por los polos $p_{1,2} = 0,66 \pm j0,3$.

- Los argumentos para los polos son

$$\beta_1 = 138,57^\circ$$

$$\beta_2 = 78,69^\circ$$

$$\beta_3 = 24,44^\circ$$

y para que se cumpla el criterio del argumento se obtiene

$$\alpha_1 = 180 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 61,7^\circ$$

Diseño de reguladores PID discretos

Método del lugar de las raíces

- A partir del ángulo α_1 podemos determinar la posición donde debe de estar situado el cero para que forme dicho ángulo con el polo dominante $0,3 + j0,66$. Dicho cero está situado en $a = 0,265$.
- Para determinar la ganancia K aplicamos el criterio del módulo

$$4K = \frac{n_1 n_2 n_3}{m_1} = \frac{0,463 \cdot 0,306 \cdot 0,725}{0,496} = 0,302$$

y de aquí que $K = 0,075$.

- El controlador PID tendrá la siguiente función de transferencia:

$$G_c(z) = \frac{0,075(z - 0,9)(z - 0,265)}{z(z - 1)}$$

Diseño de reguladores PID discretos

Método del lugar de las raíces

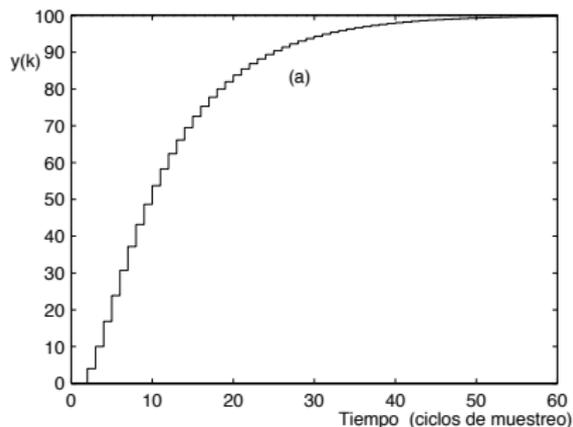


Figura 9: Respuesta del sistema en bucle abierto.

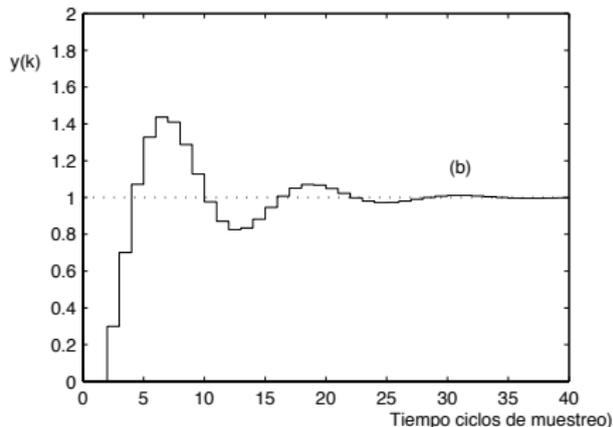


Figura 10: Respuesta en bucle cerrado con el controlador diseñado.

Estructura de un controlador PID discreto real

- La estructura de un controlador PID discreto venía dada por la siguiente expresión

$$u(k) = K[e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T}(e(k) - e(k-1))]$$

- En la que tomando transformadas z obteníamos lo siguiente

$$U(z) = [K + \frac{KT}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{KT_d}{T}(1-z^{-1})]E(z)$$

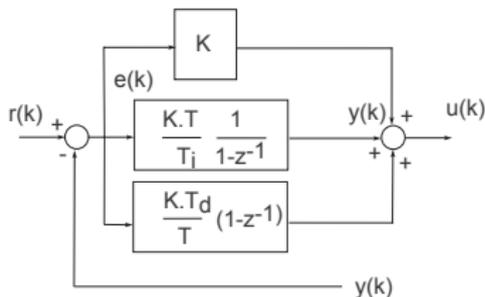


Figura 11: Estructura teórica de un control PID discreto.

Estructura teórica de un control PID discreto

Problemas

En el controlador PID teórico se pueden observar varios problemas.

- La derivada del error puede tomar valores muy grandes, lo que al multiplicar por la ganancia derivativa puede **saturar el actuador** (ruido importante o al aplicar un escalón en la entrada).
 - Para evitarlo, la ganancia derivativa se sitúa en el lazo de realimentación.
- La **saturación integral** o efecto windup se produce debido a que en sistemas lentos la integral del error puede llegar a tomar valores muy grandes. Esto satura el actuador durante mucho tiempo.
 - Se utilizan esquemas de control que permiten la desactivación del efecto integral cuando éste alcanza un cierto valor.
- En algunos sistemas resulta difícil corregir errores muy pequeños del sistema.
 - En estos casos se considera una banda muerta o zona de ganancia nula alrededor del valor de régimen permanente deseado para el sistema.

Estructura de un controlador PID discreto real

- El controlador permite además introducir dos **ganancias de prealimentación** (feedforward) que mejoran los errores de seguimiento:
 - Una para compensar los retardos producidos por la inercia del sistema (Kaff).
 - La otra para compensar la fricción en el sistema.
- Está preparado además para realizar un control en cascada con dos lazos de realimentación. Este tipo de control es usual cuando se desea realizar un control de posición en base a un motor donde se controla en el lazo interior la velocidad de giro del motor y en el lazo secundario se hace el control de posición.
- El esquema incluye también un **filtro Notch** para eliminar posibles picos de resonancia que se puedan producir en el sistema.