Ingeniería de Control II

Tema 6:
Diseño de Reguladores por Síntesis Directa

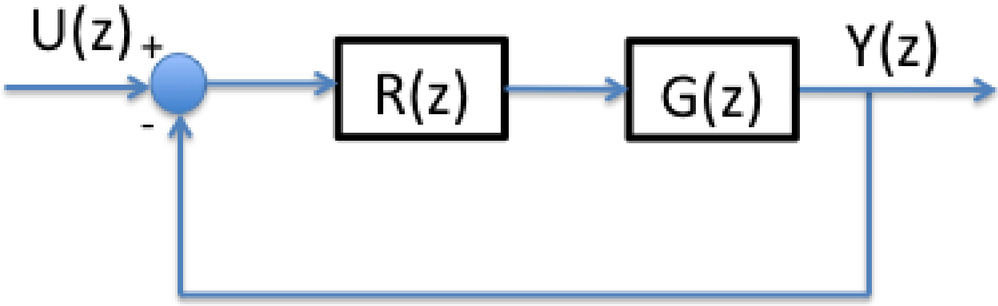
D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno S. Garrido

2025

Diseñar un regulador por síntesis directa para el sistema de la siguiente figura que cumpla con las siguientes especificaciones: $M_p \leq 10$, $n_s \leq 10$ **muestras. Considerar dos situaciones:**

a) No imponer ninguna condición para la ganancia del sistema.

b) Imponer un error de posición nulo



$$G(z) = \frac{z - 0{,}8}{(z + 0{,}5)(z - 0{,}5)}$$

Solución

Primero hay que calcular la posición de los polos según las especificaciones dadas:

$$n_s = \frac{\pi}{\sigma} = 10 \rightarrow \ \sigma \approx 0{,}314$$
$$M_p = e^{\frac{-\pi\sigma}{\theta}} = 0{,}1 \rightarrow \ \theta = 24{,}55^{o}$$
$$p_{1,2} = e^{-\sigma} cos\theta \pm je^{-\sigma} sen\theta$$
$$p_{1,2} = 0{,}664 \pm j0{,}304 \rightarrow \ P(z) = z^2 - 1{,}328z + 0{,}533$$

a) La función de transferencia en bucle cerrado será:

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 1{,}328z + 0{,}533}$$

Tiene que cumplir las condiciones de estabilidad y causalidad:
Causalidad: El sistema a controlar tiene una diferencia entre el grado del denominador y el del numerador igual a 1, y el modelo en cadena cerrada igual a 2, luego esta condición se cumple.

Estabilidad: No hay polos ni ceros fuera del círculo unidad, luego no hay problemas de estabilidad.
Calculamos el regulador:

$$R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} = \frac{(z + 0{,}5)(z - 0{,}5)}{(z - 0{,}8)(z^2 - 1{,}328z - 0{,}467)}$$

b) Para que el sistema tenga error de posición nulo, al ser de realimentación unitaria la ganancia del sistema en cadena cerrada tendrá que ser igual a la unidad. Luego el modelo será:

$$F(z) = \frac{K}{z^2 - 1{,}328z + 0{,}533}$$

$$F(1) = \frac{K}{1 - 1{,}328 + 0{,}533} = 1 \rightarrow K = 0{,}205$$

El regulador en este caso será:

$$R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} = \frac{0{,}205(z + 0{,}5)(z - 0{,}5)}{(z - 0,8)(z^2 - 1{,}328z + 0{,}328)}$$

En este apartado se llega al mismo resultado si se hace el razonamiento descrito en las transparencias, suponiendo un polo en -1 en la función en cadena abierta y aplicando las restricciones de estabilidad que dice que no hay que cancelar polos ni ceros inestables ni críticamente estables.

$$F(z) = \frac{Nf(z)}{z^m(z^2 - 1{,}328z + 0{,}533)}$$

Como se pide error de posición nulo, el sistema en cadena abierta tiene que tener al menos un polo en z=1, y hay que aplicar la condición de estabilidad para no cancelar polos ni cero inestables o críticamente estables:

$$R(z)G(z) = \frac{F(z)}{1 - F(z)} = \frac{Nf(z)}{Df(z) - Nf(z)} = \frac{Nf(z)}{(z - 1)[Df(z) - Nf(z)]^*}$$

Igualando ambas expresiones:

$$z^m(z^2 - 1{,}328z + 0{,}533) - Nf(z) = (z - 1)[Df(z) - Nf(z)]^*$$

Para que el regulador sea físicamente realizable:

$$gr[Dg(z)] - gr[Ng(z)] \leq gr[Df(z)] - gr[Nf(z)]$$

$$2 - 1 \leq m + 2 - gr[Nf(z)]$$

Ejercicio 1 (3/3)

Tomando, por simplicidad: $m = 0 \rightarrow gr[Nf(z)] = 1$

$$Nf(z) = p_0 + p_1 z$$

Por lo que queda: $gr[Df(z) - Nf(z)]^* = 1$

$$[Df(z) - Nf(z)]^* = n_0 + n_1 z$$

Volviendo a la igualación:

$$z^2 - 1{,}328z + 0{,}533 - p_0 - p_1 z = (z - 1)(n_0 + n_1 z) = n_1 z^2 + (n_0 - n_1)z - n_0$$

Como hay un grado de libertad, tomamos $p_1 = 0$

$$n_1 = 1 \quad -1{,}328 = n_0 - n_1 \quad 0{,}533 - p_0 = -n_0$$

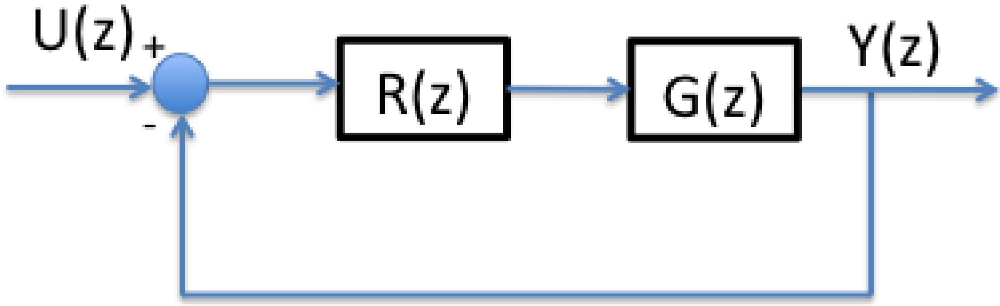
$$n_1 = 1 \quad n_0 = -0{,}328 \quad p_0 = 0{,}205$$

$$F(z) = \frac{0{,}205}{z^2 - 1{,}328z + 0{,}533}$$

$$R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} = \frac{0{,}205(z + 0{,}5)(z - 0{,}5)}{(z - 0,8)(z^2 - 1{,}328z + 0{,}328)}$$

Se llega a la misma solución.

Diseñar un regulador por síntesis directa para el sistema de la siguiente figura que cumpla con las siguientes especificaciones: $e_p = 0$, $n_s \approx 5$ **y** $n_p \approx 3$ **muestras.**



$$G(z) = \frac{(z-0{,}5)(z-0{,}1)}{(z-1)(z-1{,}2)(z-0{,}6)}$$

Solución

Primero se calcula la posición de los polos en cadena cerrada a partir de las especificaciones:

$$n_p = \frac{\pi}{\theta} \approx 3 \rightarrow \theta \approx \frac{\pi}{3}$$
$$n_s = \frac{\pi}{\sigma} \approx 5 \rightarrow \sigma \approx \frac{\pi}{5}$$

Los polos dominantes y la ecuación característica son:

$$p_{1,2} = 0{,}2667 \pm j0{,}4620 \quad P(z) = z^2 - 0{,}53z + 0{,}28$$

Pasamos a diseñar un regulador que cumpla las especificaciones.

$$F(z) = \frac{Nf(z)}{z^m(z^2 - 0{,}53z + 0{,}28)}$$

Como se pide error de posición nulo, el sistema en cadena abierta tiene que tener al menos un polo en z=1, y hay que aplicar la condición de estabilidad para no cancelar polos ni cero inestables o críticamente estables. Además, la función en cadena abierta tiene un polo inestable en z=1.2:

$$R(z)G(z) = \frac{F(z)}{1-F(z)} = \frac{Nf(z)}{Df(z) - Nf(z)} = \frac{Nf(z)}{(z-1)(z-1{,}2)[Df(z) - Nf(z)]^*}$$

Igualando ambas expresiones:

$$z^m(z^2 - 0{,}53z + 0{,}28) - Nf(z) = (z-1)(z-1{,}2)[Df(z) - Nf(z)]^*$$

Ejercicio 2 (2/2)

Para que el regulador sea físicamente realizable:

$$gr[Dg(z)] - gr[Ng(z)] \leq gr[Df(z)] - gr[Nf(z)]$$
$$3 - 2 \leq m + 2 - gr[Nf(z)]$$

Tomando, por simplicidad: $m = 0 \rightarrow gr[Nf(z)] = 1$

$$Nf(z) = p_0 + p_1 z$$

Por lo que queda: $gr[Df(z) - Nf(z)]^* = 0$

$$[Df(z) - Nf(z)]^* = n_0$$

Volviendo a la igualación:

$$z^2 - 0{,}53z + 0{,}28 - p_0 - p_1 z = (z-1)(z-1{,}2)n_0 = n_0 z^2 - 2{,}2 n_0 z + 1{,}2 n_0$$

Es un sistema de ecuaciones con tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$n_0 = 1 \quad -(0{,}53 + p_1) = -2{,}2 n_0 \quad 0{,}28 - p_0 = 1{,}2 n_0$$
$$n_0 = 1 \quad p_1 = 1{,}67 \quad p_0 = -0{,}92$$
$$F(z) = \frac{1{,}67z - 0{,}92}{z^2 - 0{,}53z + 0{,}28}$$

El regulador buscado es:

$$R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} = \frac{(z - 0{,}6)(1{,}67z - 0{,}92)}{(z - 0{,}5)(z - 0{,}1)}$$

Comprobamos que en cadena abierta no se cancelan polos ni ceros inestables y hay un polo en z=1:

$$R(z)G(z) = \frac{1{,}67z - 0{,}92}{(z-1)(z-1{,}2)}$$

Diseñar un regulador por síntesis directa para el sistema de realimentación unitaria y función de transferencia dada cumpla con las siguientes especificaciones: $e_p = 0$**,** $M_p = 15$ **y** $n_s \approx 10$ **muestras.**

$$G(z) = \frac{(z+0{,}5)(z-1{,}1)}{(z+1{,}2)(z-0{,}2)(z+0{,}4)}$$

Solución

Primero se calcula la posición de los polos en cadena cerrada a partir de las especificaciones:

$$n_s = \frac{\pi}{\sigma} = 10 \rightarrow \ \sigma \approx 0{,}314$$

$$M_p = e^{\frac{-\pi\sigma}{\theta}} = 0{,}15 \rightarrow \ \theta = 29{,}8076^{o}$$

Los polos dominantes y la ecuación característica son:

$$p_{1,2} = 0{,}6339 \pm j0{,}3631 \quad P(z) = z^2 - 1{,}268z + 0{,}5337$$

Pasamos a diseñar un regulador que cumpla las especificaciones.

$$F(z) = \frac{Nf(z)}{z^m(z^2 - 1{,}268z + 0{,}5337)}$$

Como se pide error de posición nulo, el sistema en cadena abierta tiene que tener al menos un polo en z=1, y hay que aplicar la condición de estabilidad para no cancelar polos ni cero inestables o críticamente estables. Además, la función en cadena abierta tiene un polo inestable en z=-1.2 y un cero en z=1.1:

$$R(z)G(z) = \frac{F(z)}{1-F(z)} = \frac{Nf(z)}{Df(z) - Nf(z)} = \frac{(z-1{,}1)Nf(z)^*}{(z-1)(z+1{,}2)[Df(z)-Nf(z)]^*?}$$

Igualando ambas expresiones:

$$z^m(z^2 - 1{,}268z + 0{,}5337) - (z-1{,}1)Nf(z)^* = (z-1)(z+1{,}2)[Df(z) - Nf(z)]^*$$

Para que el regulador sea físicamente realizable:

$$gr[Dg(z)] - gr[Ng(z)] \leq gr[Df(z)] - gr[Nf(z)]$$
$$2 - 1 \leq m + 2 - gr[Nf(z)]$$

Tomando, por simplicidad: $m = 0 \rightarrow gr[Nf(z)] = 1, gr[Nf(z)^*] = 0$

$$Nf(z)^* = p_0$$

Por lo que queda: $gr[Df(z) - Nf(z)]^* = 0$

$$[Df(z) - Nf(z)]^* = n_0$$

Volviendo a la igualación:

$$z^2 - 1{,}268z + 0{,}5337 - (z - 1{,}1)\, p_0 = (z - 1)\,(z + 1{,}2)\, n_0 = n_0 z^2 + 0{,}2 n_0 z - 1{,}2 n_0$$

Es un sistema de ecuaciones con tres ecuaciones y dos incógnitas que no se va a cumplir nunca, luego no me vale con m=0.
Tomo m=1:

$$m = 1 \rightarrow gr[Nf(z)] = 2, gr[Nf(z)^*] = 1$$
$$Nf(z)^* = p_0 + p_1 z$$

Por lo que queda: $gr[Df(z) - Nf(z)]^* = 1$

$$[Df(z) - Nf(z)]^* = n_0 + n_1 z$$

Volviendo a la igualación:

$$z(z^2 - 1{,}268z + 0{,}5337) - (z - 1{,}1)(p_0 + p_1 z) = (z - 1)(z + 1{,}2)(n_0 + n_1 z)$$

Es un sistema de ecuaciones con cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, por lo que ahora si se puede resolver:

$$z^3 - (p_1 + 1{,}268)z^2 + (0{,}5337 - p_0 + 1{,}1p_1)z + 1{,}1p_0 =$$
$$= n_1 z^3 + (n_0 + 0{,}2n_1)z^2 + (0{,}2n_0 - 1{,}2n_1)z - 1{,}2n_0$$

$$\left.\begin{array}{c} n_1 = 1 \\ -p_1 - 1.268 = n_0 + 0.2 \\ 0.5337 - p_0 + 1.1p_1 = 0.2n_0 - 1.2 \\ 1.1p_0 = -1.2n_0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} n_1 = 1 \\ n_0 = 0.5686 \\ p_1 = -2.0366 \\ p_0 = -0.6203 \end{array}$$

$$F(z) = \frac{(z - 1{,}1)(-2{,}0366z - 0{,}6203)}{z(z^2 - 1{,}268z + 0{,}5337)}$$

El regulador buscado es:

$$R(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{F(z)}{1 - F(z)} = \frac{(z - 0{,}2)(z + 0{,}4)(-2{,}0366z - 0{,}6203)}{(z + 0{,}5)(z - 1)(z + 0{,}5715)}$$

Comprobamos que en cadena abierta no se cancelan polos ni ceros inestables y hay un polo en z=1:

$$R(z)G(z) = \frac{(-2{,}0366z - 0{,}6203)(z - 1{,}1)}{(z - 1)(z + 1{,}2)(z + 0{,}5715)}$$

Diseñar un regulador por síntesis directa para el sistema de realimentación unitaria y función de transferencia dada tenga un error de posición nulo y polos en cadena cerrada en 0,9 y 0,8:

$$G(z) = \frac{(z+1{,}2)(z+0{,}6)}{(z-1)(z+0{,}5)(z-0{,}3)}$$

Solución

Primero se calcula el polinomio característico en cadena cerrada. Los polos dominantes y la ecuación característica son:

$$p_{1,2} = 0{,}9, 0{,}8 \quad P(z) = z^2 - 1{,}7z + 0{,}72$$

Pasamos a diseñar un regulador que cumpla las especificaciones.

$$F(z) = \frac{Nf(z)}{z^m(z^2 - 1{,}7z + 0{,}72)}$$

Como se pide error de posición nulo, el sistema en cadena abierta tiene que tener al menos un polo en z=1, y hay que aplicar la condición de estabilidad para no cancelar polos ni cero inestables o críticamente estables. Además, la función en cadena abierta tiene un cero inestable en z=1.2:

$$R(z)G(z) = \frac{F(z)}{1-F(z)} = \frac{Nf(z)}{Df(z)-Nf(z)} = \frac{(z+1{,}2)Nf(z)^*}{(z-1)[Df(z)-Nf(z)]^*}$$

Igualando ambas expresiones:

$$z^m(z^2 - 1{,}7z + 0{,}72) - (z+1{,}2)Nf(z)^* = (z-1)[Df(z)-Nf(z)]^*$$

Para que el regulador sea físicamente realizable:

$$gr[Dg(z)] - gr[Ng(z)] \leq gr[Df(z)] - gr[Nf(z)]$$
$$2 - 1 \leq m + 2 - gr[Nf(z)]$$

Tomando, por simplicidad: $m = 0 \rightarrow gr[Nf(z)] = 1, gr[Nf(z)^*] = 0$

$$Nf(z)^* = p_0$$

Por lo que queda: $gr[Df(z) - Nf(z)]^* = 1$

$$[Df(z) - Nf(z)]^* = n_0 + n_1 z$$

Volviendo a la igualación:

$$z^2 - 1{,}7z + 0{,}72 - (z + 1{,}2)p_0 = (z - 1)(n_0 + n_1 z) = n_1 z^2 + (n_0 - n_1)z - n_0$$

Es un sistema de ecuaciones con tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$n_1 = 1 \quad -(1{,}7 + p_0) = n_0 - 1 \quad 0{,}72 - 1{,}2p_0 = -n_0$$

$$n_1 = 1 \quad p_0 = 0{,}0091 \quad n_0 = -0{,}7091$$

$$F(z) = \frac{0{,}0091(z + 1{,}2)}{z^2 - 1{,}7z + 0{,}72}$$

El regulador buscado es:

$$R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} = 0{,}0091 \frac{(z + 0{,}5)(z - 0{,}3)}{(z + 0{,}6)(z - 0{,}7091)}$$

Comprobamos que en cadena abierta no se cancelan polos ni ceros inestables y hay un polo en z=1:

$$R(z)G(z) = 0{,}0091 \frac{(z + 1{,}2)}{(z - 1)(z + 0{,}7091)}$$

Ejercicio 4 (3/3)

¿Qué pasaría si cambia G(z)?

$$G(z) = \frac{(z-1{,}2)(z+0{,}6)}{(z-1)(z+0{,}5)(z-0{,}3)}$$

El razonamiento para resolverlo es el mismo, pero tenemos la siguiente ecuación:

$$z^2 - 1{,}7z + 0{,}72 - (z-1{,}2)p_0 = (z-1)(n_0 + n_1 z) = n_1 z^2 + (n_0 - n_1)z - n_0$$

Es un sistema de ecuaciones con tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$n_1 = 1 \quad -(1{,}7 + p_0) = n_0 - 1 \quad 0{,}72 + 1{,}2p_0 = -n_0$$

$$n_1 = 1 \quad p_0 = -0{,}1 \quad n_0 = -0{,}6$$

$$F(z) = \frac{(-0{,}1)(z-1{,}2)}{z^2 - 1{,}7z + 0{,}72}$$

El regulador buscado es:

$$R(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{F(z)}{1-F(z)} = (-0{,}1)\frac{(z+0{,}5)(z-0{,}3)}{(z+0{,}6)(z-0{,}6)}$$

Comprobamos que en cadena abierta no se cancelan polos ni ceros inestables y hay un polo en z=1:

$$R(z)G(z) = (-0{,}1)\frac{(z-1{,}2)}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

Ojo, en este caso obtenemos un regulador con la K negativa, y esto hay que tenerlo en cuenta si queremos dibujar el lugar de las raíces del sistema con regulador para comprobar que cumple con las especificaciones.