uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Ingeniería de Control II

Tema 6:
Diseño de reguladores por síntesis directa

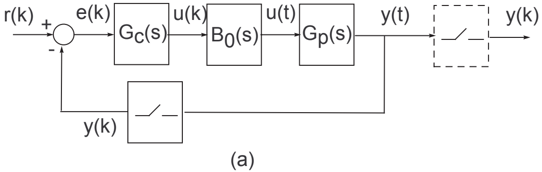
D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido,

2025

Contenido

- Los controladores clásicos de tipo PID estaban basados inicialmente en el uso de dispositivos físicos para conseguir las diferentes acciones de control.
  - La estructura de los controladores es **rígida**, lo que condiciona el diseño de los controladores a las acciones de control integradas en ellos.
  - Si el sistema es complejo, **un PID puede no ser suficiente** para conseguir unas prestaciones adecuadas. Puede ocurrir que el controlador necesario sea más complejo que el realizable por medio de un controlador PID clásico.
- El uso de computadores permite poder diseñar e implantar algoritmos de control complejos.
  - Estudiaremos el diseño analítico de controladores en tiempo discreto que no estén restringidos a una forma básica de función de transferencia (**método de síntesis directa**).

Estructura



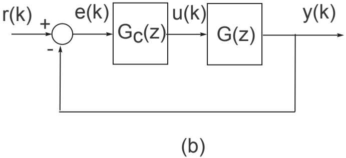


Figura 1: Estructura del control a) y equivalente discreto del sistema b).

- Es necesario obtener el equivalente discreto del sistema ya que es un diseño analítico.
- En un sistema como el mostrado en la figura anterior (equivalente discreto), la transformada z del conjunto bloqueador-proceso viene dado por

$$
\begin{aligned}
G(z) &= Z[BG_p(s)] = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s)\right] \\
&= (1-z^{-1}) \sum_{\text{Polos en C}} Res\left(\frac{G(s)}{s}\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right)
\end{aligned}
$$

Método de síntesis directa

Idea básica

- La función de transferencia deseada debe ser igual a la función de transferencia del sistema equivalente en bucle cerrado:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)}$$

- Despejando la expresión del controlador $G_c(z)$ tenemos

$$G_c(z) = \frac{F(z)}{G(z) - F(z)G(z)} = \frac{F(z)}{G(z)[1 - F(z)]}$$

- Conocemos la función de transferencia discreta del sistema $G(z)$ y conocemos la función de transferencia que deseamos que cumpla el sistema en bucle cerrado, $F(z)$, por lo que es posible determinar la función de transferencia discreta del controlador $G_c(z)$.

Método de síntesis directa

Etapas

El proceso de diseño del regulador se realiza en tres pasos:

- Determinación la función de transferencia deseada en cadena cerrada, $F(z)$, para el sistema, de forma que verifique las especificaciones de diseño.
- Obtener por igualación entre la función de transferencia deseada del sistema en bucle cerrado y la ecuación vista anteriormente de $G_c(z)$, la función de transferencia del controlador.
- Implantar el controlador obtenido.

- Entre los aspectos a considerar en el diseño del regulador tenemos tres básicos:
  - El controlador que obtengamos tiene que ser físicamente **realizable**, por lo que su función de transferencia tiene que ser causal. Es decir, el grado del numerador tiene que ser menor o igual que el del denominador.
  - Es conveniente que el controlador obtenido sea lo más **simple** posible. Hay que tener en cuenta que pueden existir muchos controladores que den lugar a la función de transferencia deseada, $F(z)$ en cadena cerrada.
  - En la práctica no es posible llevar a cabo una cancelación exacta polo-cero. Por lo que **no resulta conveniente cancelar polos o ceros inestables o críticamente estables** del proceso, ya que esto da lugar a sistemas inestables.

Restricciones de realización física

Para garantizar la realización física del controlador es necesario que la función de transferencia discreta del mismo sea causal.

- La función de transferencia del controlador debe tener un polinomio en el numerador de grado menor o igual que el del denominador.
- Si suponemos que la función de transferencia del controlador tiene la forma

$$\begin{aligned} G_c(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}} \\ &= = \frac{F(z)}{G(z)[1 - F(z)]} = \frac{Ng_c(z)}{Dg_c(z)} = \frac{Nf(z)Dg(z)}{Ng(z)[Df(z) - Nf(z)]} \end{aligned}$$

- la **condición general de realización** será la relación entre los grados de los polinomios:

$$gr[Dg_c(z)] \geq gr[Ng_c(z)]$$

Restricciones de realización física

Condición

- Expresando $F(z)$, $G(z)$ y $G_c(z)$ en función de los polinomios de sus correspondientes numeradores y denominadores

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{Nf(z)}{Df(z)} \\
G(z) &= \frac{Ng(z)}{Dg(z)} \\
G_c(z) &= \frac{Ng_c(z)}{Dg_c(z)} = \frac{Nf(z)Dg(z)}{Ng(z)[Df(z) - Nf(z)]}
\end{aligned}
$$

- la condición de realización se puede expresar de la siguiente forma

$$gr[Nf(z)] + gr[Dg(z)] \leq gr[Ng(z)] + gr[Df(z) - Nf(z)]$$

- Además de ser realizable físicamente el controlador, también debe de serlo el sistema en cadena cerrada

$$gr[Nf(z)] \leq gr[Df(z)]$$

- Teniendo en cuenta esta condición, el último término de la condición de realización se puede simplificar:

$$gr[Nf(z)] + gr[Dg(z)] \leq gr[Ng(z)] + gr[Df(z)]$$

- Reubicando los términos de la desigualdad obtenemos que

$$gr[Dg(z)] - gr[Ng(z)] \leq gr[Df(z)] - gr[Nf(z)]$$

- La diferencia entre los grados del denominador y del numerador en $F(z)$ (en sistemas discretos esto indica el retardo del sistema), debe ser mayor o igual que el retardo del proceso $G(z)$. Es decir, el retardo del modelo $F(z)$ tiene que ser igual o mayor que el retardo del proceso a controlar.

Conveniencia de simplicidad

$$G_c(z) = \frac{F(z)}{G(z)[1 - F(z)]} = \frac{Nf(z)Dg(z)}{Ng(z)[Df(z) - Nf(z)]}$$

- Se podría pensar que, como la expresión general de la función de transferencia del controlador es función de $F(z)$, cuanto más sencilla sea $F(z)$, más lo será $G_c(z)$.
- Esto no es cierto, pues hay que tener en cuenta que la función de transferencia del proceso $G(z)$ aparece también y ésta puede ser muy compleja.
- Conviene que el controlador sea lo más sencillo que la función de transferencia del sistema y las especificaciones nos permitan. Para ello, la desigualdad de la condición de realización debe convertirse en la igualdad:

$$gr[Dg(z)] - gr[Ng(z)] = gr[Df(z)] - gr[Nf(z)]$$

Restricciones de estabilidad

- De la función de transferencia en cadena cerrada del sistema más el regulador se tiene que

$$F(z) = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)}$$

- Despejando en $F(z)$ se obtiene la expresión del controlador como función de las funciones de transferencia en cadena cerrada deseada $F(z)$ y del proceso $G(z)$.

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)}$$

- La función de transferencia que se obtiene para el controlador $G_c(z)$ tiene dos términos:
  - El primer término es la inversa de la función de transferencia del proceso.
  - El segundo término es función únicamente de la función de transferencia deseada para el sistema $F(z)$.

Restricciones de estabilidad

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)}$$

- El primer término del controlador puede cancelar los polos y ceros del proceso.
- Matemáticamente sería posible diseñar el regulador de forma que se cancelasen en cadena abierta los polos y ceros inestables del proceso. Sin embargo estas cancelaciones, que matemáticamente no presentan problemas, son muy conflictivas en la práctica, ya que una cancelación exacta es improbable, lo que ocasiona que el sistema se inestabilice o que no se amortigüe adecuadamente.
- Es necesario por lo tanto **evitar las cancelaciones de aquellos polos o ceros del proceso que estén fuera del círculo unidad o sobre él**.

Restricciones de estabilidad

- Si indicamos en la función de transferencia del proceso separadamente los polos y ceros situados en el interior del círculo unidad $(Dg_i(z), Ng_i(z))$ y los situados sobre el círculo o en el exterior $(Dg_e(z), Ng_e(z))$

$$\begin{aligned} Ng(z) &= Ng_e(z)Ng_i(z) \\ Dg(z) &= Dg_e(z)Dg_i(z) \end{aligned}$$

- Una forma de evitar las cancelaciones indeseadas con los polos y ceros inestables (o críticamente estables) de G_cG consiste en:
  - Hacer que los polos y ceros inestables aparezcan de forma explícita en $F(z)$ y en $1 - F(z)$ de forma que cancelen los que aparecen en el término $1/G(z)$ del controlador.
  - De esta forma, los polos y ceros del proceso no serán cancelados.
  - No es posible cancelar de forma exacta con el proceso, y sin embargo, sí es posible realizarlo en el controlador, puesto que la $G(z)$ que aparece en éste es la del modelo estimado del sistema y no la real, que no se conoce con exactitud.

Restricciones de estabilidad

- Supongamos entonces que se escoge la función de transferencia $F(z)/(1-F(z))$ de forma que:

$$\begin{aligned} Nf(z) &= Ng_e(z)Nf^*(z) \\ Df(z)-Nf(z) &= Dg_e(z)[Df(z)-Nf(z)]^* \end{aligned}$$

  donde el asterisco expresa el resto de la función después de extraer el término correspondiente.

- Sustituyendo estas expresiones anteriores en $G_c(z)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} G_c(z) &= \frac{Dg(z)}{Ng(z)} \frac{Nf(z)}{[Df(z)-Nf(z)]} \\ &= \frac{Dg_e(z)Dg_i(z)}{Ng_e(z)Ng_i(z)} \frac{Ng_e(z)Nf^*(z)}{Dg_e(z)[Df(z)-Nf(z)]^*} \\ &= \frac{Dg_i(z)Nf^*(z)}{Ng_i(z)[Df(z)-Nf(z)]^*} \end{aligned}$$

Restricciones de estabilidad

- En la expresión del controlador

$$G_c(z) = \frac{Dg_i(z)Nf^*(z)}{Ng_i(z)[Df(z) - Nf(z)]^*}$$

se han cancelado los polos y ceros inestables o criticamente estables.

- La función de transferencia del sistema con controlador en cadena abierta queda como

$$\begin{aligned} G_c(z)G(z) &= \frac{Dg_i(z)Nf^*(z)}{Ng_i(z)[Df(z) - Nf(z)]^*} \frac{Ng_e(z)Ng_i(z)}{Dg_e(z)Dg_i(z)} \\ &= \frac{Nf^*(z)Ng_e(z)}{[Df(z) - Nf(z)]^* Dg_e(z)} \end{aligned}$$

En la función de transferencia en cadena abierta del sistema no se han cancelado los polos y ceros inestables o críticamente estables del proceso como deseábamos.

- Para que no se produzcan cancelaciones entre los polos y ceros del regulador con los polos y ceros inestables o críticamente estables del proceso, se tienen que verificar las siguiente restricciones:
  - Los ceros del numerador de la función de transferencia en cadena cerrada deseada, $F(z)$, para el sistema, deben de contener los ceros inestables o críticamente estables de la planta.

$$Nf(z) = Ng_e(z)Nf^*(z)$$

  - La expresión polinómica $[Df(z) - Nf(z)]$ debe contener entre sus ceros los polos inestables o críticamente estables del proceso.

$$[Df(z) - Nf(z)] = Dg_e(z)[Df(z) - Nf(z)]^*$$

Ejemplo

- Sea un sistema cuyo equivalente discreto viene dado por:

$$G(z) = \frac{(z-0{,}5)}{(z-0{,}2)(z-0{,}9)}$$

- Se quiere diseñar un controlador de forma que los polos en cadena cerrada del sistema estén situados en $p_{1,2} = 0{,}3 \pm j0{,}6$ y que además tenga un error en régimen permanente ante entrada escalón nulo.
- De las posiciones de los polos podemos decir que la función de transferencia $F(z)$ debe tener la siguiente forma:

$$F(z) = \frac{Nf(z)}{z^m(z-0{,}3+j0{,}6)(z-0{,}3-j0{,}6)} = \frac{Nf(z)}{z^m(z^2-0{,}6z+0{,}45)}$$

  siendo z^m una variable de ajuste, que como sabemos, no influye en la dinámica de $F(z)$.

Ejemplo

- Para que el sistema tenga error en régimen permanente nulo es necesario introducir un polo en $(z-1)$ en la función de transferencia en cadena abierta. Es decir

$$G(z)G_c(z) = \frac{F(z)}{1-F(z)} = \frac{Nf(z)}{[Df(z)-Nf(z)]} = \frac{Nf(z)}{(z-1)[Df(z)-Nf(z)]^*}$$

- De las ecuaciones $F(z)$ y $G(z)G_c(z)$, tenemos que:

$$[Df(z)-Nf(z)] = z^m(z^2-0{,}6z+0{,}45)-Nf(z) = (z-1)[Df(z)-Nf(z)]^*$$

- Tenemos que determinar el valor de m y los polinomios $Nf(z)$ y $[Df(z)-Nf(z)]^*$ para obtener la expresión del controlador que satisface las especificaciones de diseño.

Ejemplo

- La restricción de **estabilidad** en este caso no afecta puesto que todos los polos y ceros del proceso son estables.
- La restricción de **realización física** nos indica que

  $$gr[Dg(z)] - gr[Ng(z)] \leq gr[Df(z)] - gr[Nf(z)]$$

  es decir,

  $$2 - 1 \leq (m + 2) - gr[Nf(z)]$$

  luego $gr[Nf(z)] \leq m + 1$.
- Por **simplicidad** tomaremos el menor grado m que nos garantice una solución.
  - Supongamos que $m = 0$. En este caso $gr[Nf(z)] \leq 1$, es decir, $Nf(z) = p_0 + p_1 z$.
  - Al hacer $m = 0$, el grado de $gr[Df(z) - Nf(z)] = 2$
  - Y como $[Df(z) - Nf(z)] = (z - 1)[Df(z) - Nf(z)]^*$, el término $[Df(z) - Nf(z)]^*$ será un polinomio de grado 1.
  - De acuerdo con esto, nos queda que

  $$(z^2 - 0{,}6z + 0{,}45) - (p_0 + p_1 z) = (z - 1)(n_0 + n_1 z)$$

Ejemplo

- En esta expresión, al ser un polinomio de grado 2, tenemos tres ecuaciones (tantas como coeficientes tiene el polinomio) y cuatro incógnitas (p_0, p_1, n_0, n_1).
- Tenemos una incógnita más que el número de ecuaciones, luego tenemos 1 grado de libertad.
- Añadimos una condición más al sistema para igualar el número de ecuaciones con el de incógnitas, por ejemplo, suponer que $p_1 = 0$. Con esta condición tendremos que

$$(z^2 - 0{,}6z + 0{,}45) - (p_0) = (z - 1)(n_0 + n_1 z)$$

- De esta expresión tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= n_1 \\ -0{,}6 &= n_0 - n_1 \\ 0{,}45 - p_0 &= -n_0 \end{aligned}$$

- Resolviendo obtenemos que la solución al sistema de ecuaciones es $p_0 = 0{,}85$, $n_0 = 0{,}4$, $n_1 = 1$.

Ejemplo

- Por lo tanto, tendremos que $F(z)$

$$F(z) = \frac{0{,}85}{(z^2 - 0{,}6z + 0{,}45)}$$

- y el controlador tendrá la siguiente función de transferencia

$$G_c(z) = \frac{0{,}85(z - 0{,}2)(z - 0{,}9)}{(z - 0{,}5)(z^2 - 0{,}6z - 0{,}4)}$$

- La función del controlador es más compleja que la de los reguladores PID, incluso para un caso relativamente simple como este.

Ejemplo

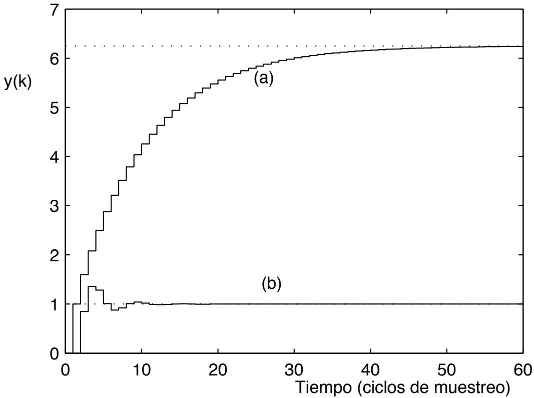


Figura 2: Respuesta del sistema a) en bucle abierto y b) en bucle cerrado con el controlador diseñado