Ingeniería de Control II

Tema 7:
Modelado y Análisis de Sistemas en el Espacio de Estados

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido

2025

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Linealizar en torno a un punto de operación el sistema dado por las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2x_3 \\
\dot{x}_2 &= cx_3 + x_4u_1 \\
\dot{x}_3 &= u_1 + x_2x_4 \\
\dot{x}_4 &= x_1 + dx_3(1 - u_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= ex_1 + x_2 \\
y_2 &= x_3x_4
\end{aligned}
$$

Solución:

Para resolver este problema hay que calcular las jacobianas que permiten la linealización del sistema:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} \\
\tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1 (2/2)

$$\mathbf{A} = \nabla_x f\Big|_{x_0,u_0} = \begin{pmatrix} a & bx_{3_0} & bx_{2_0} & 0 \\ 0 & 0 & c & u_{1_0} \\ 0 & x_{4_0} & 0 & x_{2_0} \\ 1 & 0 & d(1-u_{2_0}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \nabla_u f\Big|_{x_0,u_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{4_0} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -dx_{3_0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \nabla_x g\Big|_{x_0,u_0} = \begin{pmatrix} e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{4_0} & x_{3_0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \nabla_u g\Big|_{x_0,u_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular las tres formas canónicas: Controlable, Observable y Jordan, del sistema cuya función de transferencia es la siguiente:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2+1{,}3z+0{,}4}$$

Solución:

La función de transferencia tendrá los siguientes coeficientes:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

- *Forma Canónica Controlable:*

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_0 - b_2\frac{a_0}{a_2} & b_1 - b_2\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \frac{b_2}{a_2} u(k)$$

Si substituimos por los coeficientes de la función de transferencia llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}4 & -1{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

- *Forma Canónica Observable:*

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_2\frac{a_0}{a_2} \\ b_1 - b_2\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \frac{b_2}{a_2} u(k)$$

Si substituimos por los coeficientes de la función de transferencia llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}4 \\ 1 & -1{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

- *Forma canónica de Jordan:*

Primero descomponemos en fracciones simples la función de transferencia:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2 + 1{,}3z + 0{,}4} = \frac{5/3}{z+0{,}5} + \frac{-2/3}{z+0{,}8}$$

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$F(z) = \frac{c_1}{z-\lambda_1} + \frac{c_2}{z-\lambda_2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \frac{b_2}{a_2} u(k)$$

Ejercicio 2 (3/3)

Si substituimos por los coeficientes de la función de transferencia llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Calcular las tres formas canónicas: Controlable, Observable y Jordan, del sistema cuya función de transferencia es la siguiente:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(z+0{,}5)(z-0{,}4)}{(z+1)(z-0{,}5)(z-0{,}5)}$$

Solución:

La función de transferencia tendrá los siguientes coeficientes:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{z^2 + 0{,}1z - 0{,}2}{z^3 - 0{,}75z + 0{,}25}$$

- *Forma Canónica Controlable:*

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_0 - b_3\frac{a_0}{a_3} & b_1 - b_3\frac{a_1}{a_3} & b_2 - b_3\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \frac{b_3}{a_3} u(k)$$

Si substituimos por los coeficientes de la función de transferencia llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}25 & 0{,}75 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0{,}1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- *Forma Canónica Observable:*

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_3} \\ 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} \\ 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_3\frac{a_0}{a_3} \\ b_1 - b_3\frac{a_1}{a_3} \\ b_2 - b_3\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \frac{b_3}{a_3} u(k)$$

Si substituimos por los coeficientes de la función de transferencia llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}25 \\ 1 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- *Forma Canónica de Jordan:*

Primero descomponemos en fracciones simples la función de transferencia:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 0{,}1z - 0{,}2}{(z+1)(z-0{,}5)^2} = \frac{A}{(z-0{,}5)^2} + \frac{B}{z-0{,}5} + \frac{C}{z+1}$$

Calculamos el valor de los coeficientes:

$$(B+C)z^2 + (A+0{,}5B-C)z + A - 0{,}5B + 0{,}25C = z^2 + 0{,}1z - 0{,}2$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0{,}0667}{(z-0{,}5)^2} + \frac{0{,}6889}{z-0{,}5} + \frac{0{,}3111}{z+1}$$

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$F(z) = \frac{c_1}{(z-\lambda_1)^2} + \frac{c_2}{z-\lambda_1} + \frac{c_3}{z-\lambda_2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \frac{b_3}{a_3} u(k)$$

Ejercicio 3 (4/4)

Si sustituimos por los coeficientes de la función de transferencia, llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0{,}0667 & 0{,}6889 & 0{,}3111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Calcular las tres formas canónicas: Controlable, Observable y Jordan, del sistema cuya función de transferencia es la siguiente:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(z+0{,}3)(z-0{,}5)(z+0{,}8)}{(z-1)^2(z-0{,}5)(z+0{,}2)}$$

Solución:

La función de transferencia tendrá los siguientes coeficientes:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^3 + 0{,}6z^2 - 0{,}31z - 0{,}12}{z^4 - 2{,}3z^3 + 1{,}5z^2 - 0{,}1z - 0{,}1}$$

- *Forma Canónica Controlable:*

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_4} & -\frac{a_1}{a_4} & -\frac{a_2}{a_4} & -\frac{a_3}{a_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_4} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_0 - b_4\frac{a_0}{a_4} & b_1 - b_4\frac{a_1}{a_4} & b_2 - b_4\frac{a_2}{a_4} & b_3 - b_4\frac{a_3}{a_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \frac{b_4}{a_4} u(k)$$

Si substituimos por los coeficientes de la función de transferencia llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -1{,}5 & 2{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -0{,}12 & -0{,}3 & 0{,}6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

- *Forma Canónica Observable*:

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_4} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{a_1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_2}{a_4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_3}{a_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_4\frac{a_0}{a_4} \\ b_1 - b_4\frac{a_1}{a_4} \\ b_2 - b_4\frac{a_2}{a_4} \\ b_3 - b_4\frac{a_3}{a_4} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \frac{b_4}{a_4} u(k)$$

Si substituimos por los coeficientes de la función de transferencia llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 1 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}12 \\ -0{,}31 \\ 0{,}6 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

- *Forma Canónica de Jordan:*

Primero descomponemos en fracciones simples la función de transferencia:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^3 + 0{,}6z^2 - 0{,}31z - 0{,}12}{(z-1)^2(z-0{,}5)(z+0{,}2)}$$

$$= \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-0{,}5} + \frac{D}{z+0{,}2}$$

Calculamos el valor de los coeficientes:

$$B + C + D = 1, \quad (1)$$

$$A - 0{,}5B - 1{,}8C - 2{,}5D = 0{,}6, \quad (2)$$

$$-0{,}7A - 2{,}5B + 0{,}6C + 2D = -0{,}31, \quad (3)$$

$$-0{,}1A + B + 0{,}2C - 0{,}5D = -0{,}12. \quad (4)$$

Para resolver este sistema, nos ayudamos de matlab, poniendo el sistema de forma matricial (Ax=B) y utilizando el comando x=A\B.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2{,}75}{(z-1)^2} + \frac{-0{,}62}{z-1} + \frac{2{,}26}{z-0{,}5} + \frac{-0{,}64}{z+0{,}2}$$

Las siguientes expresiones nos dan la forma canónica buscada:

$$F(z) = \frac{c_1}{(z-\lambda_1)^2} + \frac{c_2}{z-\lambda_1} + \frac{c_3}{z-\lambda_2} + \frac{c_4}{z-\lambda_3}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Si substituimos por los coeficientes de la función de transferencia llegamos al resultado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Obtener las matrices T que permiten la conversión a las formas canónicas observable y controlable dado el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Solución:

Para la forma canónica observable:

$$|zI - G| = (z-1)(z-3) = z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$N = \begin{bmatrix} C^* G^* C^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = (WN^*)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}75 & 1{,}75 \end{pmatrix}$$

Las matrices del sistema transformado son:

$$G' = T^{-1}GT = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad H' = T^{-1}H = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C' = CT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema transformado queda:

$$\begin{bmatrix} x_1'(k+1) \\ x_2'(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(k) \\ x_2'(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(k) \\ x_2'(k) \end{bmatrix}$$

Para la forma canónica controlable:

$$M = \begin{bmatrix} H & GH \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = MW = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices del sistema transformado son:

$$G' = T^{-1}GT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad H' = T^{-1}H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C' = CT = \begin{pmatrix} -7 & 3 \end{pmatrix}$$

El sistema transformado queda:

$$\begin{bmatrix} x_1'(k+1) \\ x_2'(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(k) \\ x_2'(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(k) \\ x_2'(k) \end{bmatrix}$$

Obtener la matriz de transformación T que permite convertir a la forma canónica de Jordan para la siguiente representación de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- ***Solución:***

Primero se obtiene la ecuación característica:

$$|\lambda I - G| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = -1 \;\; \lambda_2 = 2 \;\; \lambda_3 = 3$$

Calculamos los vectores para cada autovalor:

- $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix}$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} -v_{11} = -v_{11} \\ v_{11} + 2v_{12} + v_{13} = -v_{12} \\ 3v_{13} = -v_{13} \end{array}\right\}$$

$$v_{13} = 0 \;\; v_{11} = -3v_{12} \rightarrow v_{12} = 1 \;\; \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix}$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} -v_{21} = 2v_{21} \\ v_{21} + 2v_{22} + v_{23} = 2v_{22} \\ 3v_{23} = 2v_{23} \end{array}\right\}$$

$$v_{21} = 0 \quad v_{23} = 0 \rightarrow v_{22} = 1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix}$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} -v_{31} = 3v_{31} \\ v_{31} + 2v_{32} + v_{33} = 3v_{32} \\ 3v_{33} = 3v_{33} \end{array}\right\}$$

$$v_{31} = 0 \quad v_{32} = v_{33} \rightarrow v_{33} = 1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de transformación T es la siguiente:

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 (3/3)

Las matrices del sistema transformado son:

$$G' = T^{-1}GT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad H' = T^{-1}H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C' = CT = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema transformado queda:

$$\begin{bmatrix} x_1'(k+1) \\ x_2'(k+1) \\ x_3'(k+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(k) \\ x_2'(k) \\ x_3'(k) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(k) \\ x_2'(k) \\ x_3'(k) \end{bmatrix}$$