uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Ingeniería de Control II

Tema 7:
Modelado y Análisis de Sistemas en el Espacio de Estados

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido,

2025

Contenido

Introducción

- Los métodos de análisis **clásicos** de sistemas:
  - Se basan en la descripción del sistema por la relación entre su entrada y su salida.
  - De una gran utilidad en sistemas dinámicos con una única entrada y una única salida, son simples y requieren un número pequeño de cálculos.
  - Tienen dificultades para su utilización en sistemas no lineales, excepto en algunos casos muy sencillos.
  - Son difíciles de usar en sistemas con múltiples entradas y salidas, o en sistemas que presentan parámetros que varían con el tiempo.
- Los métodos de análisis y modelado de sistemas basados en el **espacio de estados** son los más adecuados para el tratamiento de problemas con entradas y salidas múltiples, así como para el tratamiento de problemas con parámetros variantes en el tiempo e incluso de sistemas no lineales.

Modelado en el Espacio de Estados

- Las técnicas de modelado de sistemas en el espacio de estados se basan en:
  - Describir al sistema dinámico por medio de *n* **ecuaciones diferenciales de primer orden** para el caso de sistemas descritos en tiempo continuo o por medio de *n* **ecuaciones en diferencias** para el caso de sistemas en tiempo discreto.
  - Estas *n* ecuaciones resultantes se describen por medio de una **notación matricial**, lo que simplifica la representación matemática de las mismas.

Concepto de estado

Intuitivo

- La idea de **estado** es un concepto básico en la representación de sistemas en el espacio de estados.
- Si tratamos de describir intuitivamente lo que significa un estado en un sistema, hemos de recordar que un sistema dinámico se caracteriza porque la salida que da en un cierto instante depende de las entradas al sistema en dicho instante y de la **situación** en la que estaba el sistema como consecuencia de las entradas a las que había sido sometido el sistema anteriormente.
- Esta situación en la que se encuentra un sistema en un instante dado puede ser caracterizada por un cierto conjunto de valores numéricos.
- Este conjunto de valores numéricos que caracterizan la situación del sistema en un instante dado es lo que denominamos **estado del sistema** en ese instante de tiempo.

Definición de estado

Definición:
El **estado** *de un sistema dinámico en un instante de tiempo* t_0 *se puede definir como el* **conjunto más pequeño de valores numéricos** *que es suficiente para determinar la evolución futura del sistema para todo* $t \geq t_0$ *conocidos dichos valores numéricos y las entradas al sistema para todo* $t \geq t_0$.

Como determinamos este estado

- ¿Cómo podemos describir el estado de un cierto sistema físico?
- ¿Qué variables del sistema nos permiten caracterizar el estado del mismo?
- Una primera aproximación al problema consiste en determinar qué variables del sistema *almacenan energía*.
- La energía almacenada en un sistema suele ser un buen caracterizador del estado del mismo.
- Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1

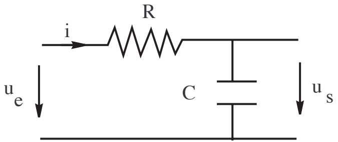


Figura 1: Circuito RC.

En el sistema de la figura, la ecuación diferencial que lo caracteriza es

$$\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = (u_e(t) - u_s(t))\frac{1}{RC}$$

Si tomamos transformadas de Laplace obtenemos

$$sU_s(s) - u_s(0) = \frac{1}{RC}[U_e(s) - U_s(s)]$$

y operando

$$U_s(s) = \frac{1}{\frac{1}{RC} + s}u_s(0) + \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + s}U_e(s)$$

Ejemplo 1 (Cont.)

La variable que mantiene la memoria del estado energético del mismo es la tensión en el condensador u_s, y será la variable de estado del sistema.

$$u_s(t) = u_s(0)e^{\frac{-1}{RC}t} + (1 - e^{\frac{-1}{RC}t})$$

Concepto de estado
Definición formal

- La definición formal debida a L.A. Zadeh es una de las más satisfactorias a la hora de expresar las propiedades del concepto de estado y variable de estado.
- Consideremos el sistema S, es decir, el modelo matemático de un sistema real que tiene como entradas las señales $u_i(t), i = 1, 2, \ldots, r$ y como salidas las señales $y_j(t), j = 1, 2, \ldots, m$, las cuales son función del tiempo.
- Al conjunto de señales de entrada lo denotaremos por el vector $\mathbf{u}(t)$ de dimensión $r \times 1$ y al de las variables de salida por $\mathbf{y}(t)$, de dimensión $m \times 1$.

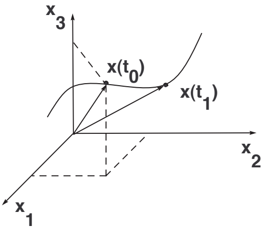


Figura 2: Concepto de estado.

La variable $\mathbf{x}(t)$ puede considerarse como variable de estado del sistema S en el instante t si satisface las siguientes condiciones:

1. Los vectores $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{u}(t, t_0)$ determinan de forma unívoca la salida $\mathbf{y}(t, t_0)$ para todos los estados iniciales $\mathbf{x}(t_0) \in X$, para todos los valores de $t \geq t_0$ y todo el espacio de las funciones de entrada u de S. Es decir:
$$\mathbf{y}(t, t_0) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t, t_0)) \tag{1}$$

2. Si t_1 es un instante de tiempo entre t_0 y t, entonces para cada vector de entrada $\mathbf{u}(t, t_0)$ y vector de salida que se observa $\mathbf{y}(t, t_0)$, considerados desde el instante t_1 de forma que dan los segmentos $\mathbf{u}(t, t_1)$ e $\mathbf{y}(t, t_1)$, existe un subconjunto no vacío de elementos del espacio X, denotado por $\mathrm{S}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}(t, t_0)]$, cuyos elementos α satisfacen la siguiente relación:
$$\mathbf{y}(t, t_1) = \mathbf{g}(\alpha, \mathbf{u}(t, t_0)) \tag{2}$$

3. Si $\mathbf{u}(t_1, t_0)$ es invariable y $\mathbf{u}(t, t_1)$ varía sobre todas las entradas del espacio de funciones de entrada de *S*, entonces la intersección de los conjuntos $\mathrm{S}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}(t, t_0)]$, considerados sobre todos los valores de $\mathbf{u}(t, t_1)$ es un conjunto no vacío.

- C1. Implica que el sistema es **determinista y causal**, por lo que los valores de las señales de salida en un instante de tiempo dado no dependen de salidas posteriores al mismo.
- C2. Asegura que a cada par $\mathbf{u}(t, t_1)$, $\mathbf{y}(t, t_1)$ le corresponde un estado inicial $\mathbf{x}(t_1)$ en X.
- C3. Esta condición asegura la existencia de al menos un estado en el espacio X, la cual se refiere a todos los posibles pares de entradas $\mathbf{u}(t, t_1)$ y salidas $\mathbf{y}(t, t_1)$, respectivamente.
- De C2 y C3 se tiene que el estado de S en el instante t está determinado por el estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ y el vector de entrada $\mathbf{u}(t, t_0)$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t, t_0)) \tag{3}$$

donde $\mathbf{f}()$ es una función unívoca de sus argumentos.

Representación matricial de las ecuaciones de estado

Forma general

- Si un sistema puede describirse por un conjunto de ecuaciones diferenciales o de ecuaciones en diferencias de primer orden, las n ecuaciones de estado de un sistema dinámico de orden n-ésimo serán:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)) \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)) \end{cases} \tag{4}$$

y las ecuaciones de salida del sistema serán las siguientes

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)) \\ y_2(t) = g_2(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)) \\ \quad\vdots \\ y_m(t) = g_m(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)) \end{cases} \tag{5}$$

Representación matricial de las ecuaciones de estado

Forma compacta

- Si expresamos los sistemas de ecuaciones anteriores de forma matricial, donde $\mathbf{x}(t)$ será un vector $n \times 1$, $\mathbf{u}(t)$ será un vector $r \times 1$ e $\mathbf{y}(t)$ será un vector $m \times 1$, tendremos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (6) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (7) \end{aligned}$$

- En el caso de que el **sistema sea lineal**, entonces las ecuaciones de estado podrán escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (8) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (9) \end{aligned}$$

donde las matrices $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ y $\mathbf{D}(t)$ son, en el caso general, matrices variantes en el tiempo de dimensiones $\mathbf{A}(t) : n \times n$, $\mathbf{B}(t) : n \times r$, $\mathbf{C}(t) : m \times n$ y $\mathbf{D}(t) : m \times r$.

Representación matricial de las ecuaciones de estado

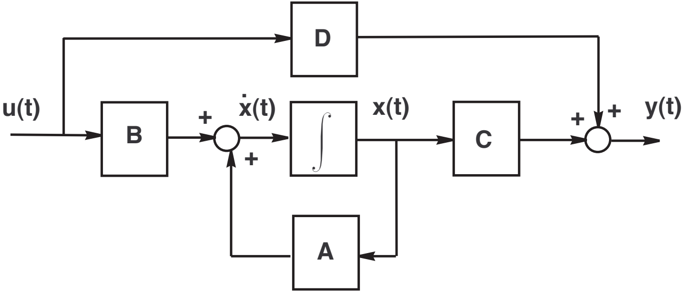


Figura 3: Diagrama de bloques de un sistema en tiempo continuo representado en ecuaciones de estado.

Representación matricial de las ecuaciones de estado

Sistemas de tiempo discreto

- En el caso de que el sistema esté definido por ecuaciones en diferencias, las expresiones de las ecuaciones de estado y de salida serán

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (10) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (11) \end{aligned}$$

- En el caso de que el sistema sea lineal o se linealice en torno a algún punto de equilibrio, tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \quad (12) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (13) \end{aligned}$$

Construcción del modelo de estado de un sistema físico

Dado un cierto sistema físico de tipo dinámico, los pasos a seguir para formular un modelo de estado son los siguientes:

1. Descomponer el sistema en los elementos básicos de forma que podamos identificar sus componentes, variables, entradas, salidas y las relaciones entre ellas.
2. Elección de las variables de estado del sistema, que en una primera aproximación se puede realizar observando los elementos dinámicos del sistema. El número de variables de un sistema debe ser igual al orden de las ecuaciones diferenciales que lo describen.
3. Obtención de las ecuaciones de estado para cada variable independiente seleccionada en el paso anterior.
4. Obtención de la ecuaciones de salida del sistema, a partir de las variables de salida que se desea controlar y de las variables de estado elegidas.

- Supongamos un filtro construido con elementos pasivos, es decir, con bobinas y condensadores, tal y como se muestra en la figura, y queremos obtener su modelo de estado.

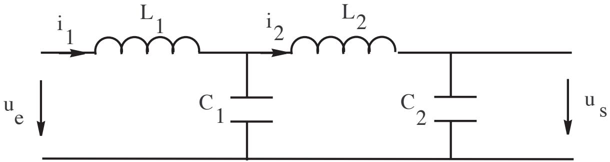


Figura 4: Filtro Butterworth de 4 orden.

- **Solución:**
  Las ecuaciones del sistema de acuerdo con las leyes de Kirchoff son:

$$
\begin{aligned}
u_e &= L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + u_{C_1} \\
u_{C_1} &= L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u_{C_2} \\
C_1 \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} &= i_1 - i_2 \\
C_2 \frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} &= i_2 \\
u_s &= u_{C_2}
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

- La elección de las variables de estado es bastante clara, ya que las variables que acumulan energía en el sistema son las tensiones en los condensadores y las intensidades en las bobinas.

Obtención del modelo de estado de un sistema

Ejemplo 2 (Cont.)

- Tomando como variables de estado las tensiones en los condensadores y las intensidades que circulan en las bobinas, tendremos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{L_1}u_e - \frac{1}{L_1}u_{C_1} \\
\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{L_2}u_{C_1} - \frac{1}{L_2}u_{C_2} \\
\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{C_1}i_1 - \frac{1}{C_1}i_2 \\
\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{C_2}i_2
\end{aligned}
\tag{15}
$$

y la salida será

$$u_s = u_{C_2}$$

es decir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_e \tag{16}$$

y la ecuación de salida sería

$$u_s = [0\ 0\ 0\ 1] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Linealización de sistemas en el espacio de estados

- Supuesto un cierto punto de operación del sistema ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$), una aproximación lineal al sistema en el entorno de ese punto de operación se obtiene a partir del desarrollo en serie de Taylor.
- El desarrollo en serie de Taylor para un sistema multivariable definido por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (18) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (19) \end{aligned}$$

en el punto de operación ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$), se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t) \quad (20) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(t) \quad (21) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ y las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son las Jacobianas de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ para $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$ definidas por las siguientes expresiones.

- Jacobianas de **f** y **g** para **x** y **u**:

$$\mathbf{A} = \nabla f_x|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \tag{22}$$
$$\mathbf{B} = \nabla f_u|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \tag{23}$$
$$\mathbf{C} = \nabla g_x|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \tag{24}$$
$$\mathbf{D} = \nabla g_u|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} \tag{25}$$

y recordando la expresión de la matriz Jacobiana

$$\nabla f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{26}$$

nos dan las expresiones de **A**, **B**, **C** y **D** para el modelo linealizado.

- Un modelo de estado simplificado para un horno de secado viene dado por el siguiente conjunto de ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 u_1 \\ \dot{x}_3 &= c_1 x_2 + c_2 u_2 (T_2 - x_3) + c_3 x_2 x_3 \end{aligned} \tag{27}$$

  y se quiere linealizar el sistema.

- **Solución:** Sustituyendo las ecuaciones en las expresiones de las Jacobianas, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \nabla f_x \big|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 \\ b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & (c_1 + c_3 x_{3,0}) & (c_3 x_{2,0} - c_2 u_{2,0}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

- y para **B**

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla f_u|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b_3 & 0 \\ 0 & c_2(T_2 - x_{3,0}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

Función de transferencia y representación en el espacio de estados

- La representación en el espacio de estados como la función de transferencia de un sistema son dos formas de modelar matemáticamente el comportamiento de un sistema.
- Ambos modelos están relacionados. Supongamos que hemos obtenido la representación de estado de un sistema, y que este sistema es lineal e invariante en el tiempo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (30)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (31)$$

donde las matrices **A**, **B**, **C** y **D** tienen dimensiones $\mathbf{A} : n \times n$, $\mathbf{B} : n \times r$, $\mathbf{C} : m \times n$ y $\mathbf{D} : m \times r$. Si hacemos la transformada de Laplace de las ecuaciones de la representación de estado, tenemos que

$$s\mathbf{X}(s) - x(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (32)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (33)$$

Función de transferencia y representación en el espacio de estados

- La función de transferencia nos da la relación que existe entre la entrada y la salida de un sistema. Hemos de relacionar por lo tanto la entrada y la salida del sistema. Para ello

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) &= \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + x(0) \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) &= \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + x(0) \\ \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}x(0) \end{aligned} \tag{34}$$

  y sustituyendo en la ecuación de salida del sistema obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}x(0) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \\ &= [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}x(0) \end{aligned} \tag{35}$$

Función de transferencia y representación en el espacio de estados

- Si suponemos que las condiciones iniciales son nulas, la función de transferencia del sistema será

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{36}$$

  Como

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} Adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^T$$

  se tiene que el polinomio característico del sistema es $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$, y por tanto, los polos del sistema coinciden con los autovalores de la matriz **A**.

Representación de sistemas en el espacio de estados

- Normalmente no se dispone de las ecuaciones del sistema de forma que pueda obtenerse el modelo en el espacio de estados de forma directa.
- Podemos encontrar un sistema descrito por una o varias ecuaciones diferenciales, de primer orden o de orden superior, lineales o no lineales.
- La matriz **D** en la mayoría de los sistemas no existe, dado que representa un reflejo de la entrada en la salida de forma directa.
- Es necesario desarrollar algún método de conversión de ecuaciones diferenciales ordinarias o de ecuaciones en diferencias a ecuaciones diferenciales o en diferencias de primer orden.

Conversión de una ecuación diferencial ordinaria a ecuaciones de estado

- La elección de las variables de estado no es única, por lo que no basta con mostrar una única solución puesto que en ocasiones una elección determinada de dichas variables de estado tiene ciertas ventajas frente a otra.
- Veremos los métodos más usuales de elección de las mismas y a qué tipo de representaciones dan lugar. Estas representaciones se denominan *formas canónicas*, y entre ellas tenemos:
  - Forma canónica controlable
  - Forma canónica observable.
  - Forma canónica de Jordan.

Forma canónica controlable

- En este método de representación la variable de estado *i*-ésima se escoge como la derivada de la variable de estado $i-1$.
- Esta elección es bastante natural en una gran cantidad de sistemas, por ejemplo, en los sistemas mecánicos donde la aceleración es la derivada de la velocidad y la velocidad la derivada de la posición (a veces se les denomina *variables de fase*).
- Supongamos un sistema invariante en el tiempo, con una única señal de entrada u y una única señal de salida y, cuya dinámica viene determinada por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \ldots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + \ldots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \tag{37}$$

con $n \geq m$.

- Si utilizamos el operador derivada $p = \frac{d}{dt}$, la expresión anterior será

$$a_n p^n y(t) + \ldots + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = b_m p^m u(t) + \ldots + b_1 p u(t) + b_0 u(t) \quad (38)$$

Sacamos $y(t)$ y $u(t)$ como factor común en ambos lados

$$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0) u(t) \quad (39)$$

y de forma más compacta

$$M(p) y(t) = N(p) u(t) \quad (40)$$

donde

$$\begin{aligned} M(p) &= a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0 \quad (41) \\ N(p) &= b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0 \quad (42) \end{aligned}$$

con lo que

$$y(t) = \frac{N(p)}{M(p)} u(t) \quad (43)$$

Forma canónica controlable

- Si definimos la primera de las variables de estado de forma que

$$x(t) = \frac{1}{M(p)}u(t) \tag{44}$$

se puede observar que la ecuación 43 ha sido reemplazada por las dos siguientes expresiones

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{M(p)}u(t) && (45)\\ y(t) &= N(p)x(t) && (46) \end{aligned}$$

- Tomando las variables de estado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}x(t) &= x_n(t) = \frac{d}{dt}x_{n-1}(t) && (47) \end{aligned}$$

Forma canónica controlable

- La ecuación 45 se puede reescribir de la siguiente forma

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t) = \frac{1}{a_n}u(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t) - \ldots - \frac{a_1}{a_n}x_2(t) - \frac{a_0}{a_n}x_1(t) \tag{48}$$

- Las ecuaciones 47 y 48 podemos expresarlas de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t) \tag{49}$$

Forma canónica controlable

- Para obtener la ecuación de salida partimos de la ecuación 46. Utilizando la definición de las variables de estado 47 y suponiendo que $n = m$, obtenemos que

$$b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + \ldots + b_{n-1} x_n(t) + b_n \frac{d}{dt} x_n(t) = y(t) \tag{50}$$

y sustituyendo en esta ecuación $\frac{d}{dt} x_n$ por 48, nos queda la siguiente expresión

$$\begin{aligned} y(t) = (b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n}) x_1(t) + (b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n}) x_2(t) + \ldots \\ \ldots + (b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n}) x_n(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t) \end{aligned} \tag{51}$$

que formulada en términos matriciales da lugar a

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n} & b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n} & \ldots & b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \frac{b_n}{a_n} u(t) \tag{52}$$

Forma canónica controlable

- Esta representación se denomina *forma canónica controlable* . Una simplificación usual se obtiene cuando $a_n = 1$. En la figura se muestra un esquema de esta representación.

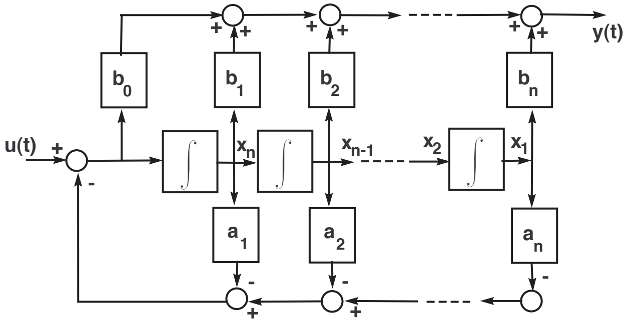


Figura 5: Representación gráfica de la forma canónica controlable.

Forma canónica observable

Las variables de estado se toman como una combinación lineal de las derivadas de las variables de entrada y de salida.

- Se toman las variables de estado de forma que x_n es función de $y(t)$ y $u(t)$, x_{n-1} es función de $y(t)$, $u(t)$ y sus derivadas y así sucesivamente:

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= a_n y(t) - b_n u(t) \\
x_{n-1}(t) &= a_{n-1} y(t) + a_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) - b_{n-1} u(t) - b_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) \\
x_{n-2}(t) &= a_{n-2} y(t) + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_n \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) - \\
&\quad - b_{n-2} u(t) - b_{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) - b_n \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u(t) \\
&\cdots \\
x_1(t) &= a_1 y(t) + a_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + \ldots + a_n \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} y(t) - \\
&\quad - b_1 u(t) - b_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) - \ldots - b_n \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} u(t)
\end{aligned} \tag{53}
$$

- De la primera ecuación de 53 calculamos $y(t)$ (ecuación de salida):

$$y(t) = \frac{1}{a_n} x_n(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t) \tag{54}$$

Forma canónica observable
Cont.

- Si derivamos las ecuaciones del sistema 53, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n(t) &= a_n\frac{d}{dt}y(t) - b_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{n-1}(t) &= a_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + a_n\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) - b_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) - b_n\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(t) \\
&\cdots \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) &= a_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + a_3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + \ldots + a_n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}y(t) - \\
&\quad -b_2\frac{d}{dt}u(t) - b_3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(t) - \ldots - b_n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}u(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) &= a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + a_2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \ldots + a_n y^{n)}(t) - \\
&\quad -b_1\frac{d}{dt}u(t) - b_2\frac{d^2}{dt^2}u(t) - \ldots - b_n\frac{d^n}{dt^n}u(t) \qquad (55)
\end{aligned}
$$

- Sustituyendo las ecuaciones 55 en el sistema de ecuaciones 53 obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= a_n y(t) - b_n u(t) \\
x_{n-1}(t) &= a_{n-1} y(t) - b_{n-1} u(t) + \frac{d}{dt} x_n(t) \\
x_{n-2}(t) &= a_{n-2} y(t) - b_{n-2} u(t) + \frac{d}{dt} x_{n-1}(t) \\
&\cdots \\
x_1(t) &= a_1 y(t) - b_1 u(t) + \frac{d}{dt} x_2(t)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Forma canónica observable

Cont.

- Y si aquí sustituimos $y(t)$ por la ecuación de salida 54, tendremos $n-1$ ecuaciones de estado. Faltaría únicamente la ecuación de estado correspondiente a $\dot{x}_1(t)$:

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - (b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n}) u(t) + \frac{d}{dt} x_n(t) \\
x_{n-1}(t) &= \frac{a_{n-2}}{a_n} x_n(t) - (b_{n-2} - b_n \frac{a_{n-2}}{a_n}) u(t) + \frac{d}{dt} x_{n-1}(t) \\
&\vdots \\
x_2(t) &= \frac{a_1}{a_n} x_n(t) - (b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n}) u(t) + \frac{d}{dt} x_2(t) \qquad (57)
\end{aligned}$$

- Para obtener la ecuación de estado que falta combinamos las ecuaciones 57 con la ecuación diferencial original expresada en términos de las variables de estado que hemos definido:

$$0 = \frac{a_0}{a_n} x_n(t) - (b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n}) u(t) + \frac{d}{dt} x_1(t) \qquad (58)$$

Forma canónica observable

Cont.

- Escribiendo en forma matricial las ecuaciones 57 y 58, obtenemos el conjunto de ecuaciones de estado y de la ecuación 54 la ecuación de salida, es decir:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{a_1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n\frac{a_0}{a_n} \\ b_1 - b_n\frac{a_1}{a_n} \\ \vdots \\ b_{n-2} - b_n\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ b_{n-1} - b_n\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} u(t) \tag{59}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \frac{b_n}{a_n}u(t) \tag{60}$$

Forma canónica observable

Cont.

- En la figura se muestra un esquema de esta representación:

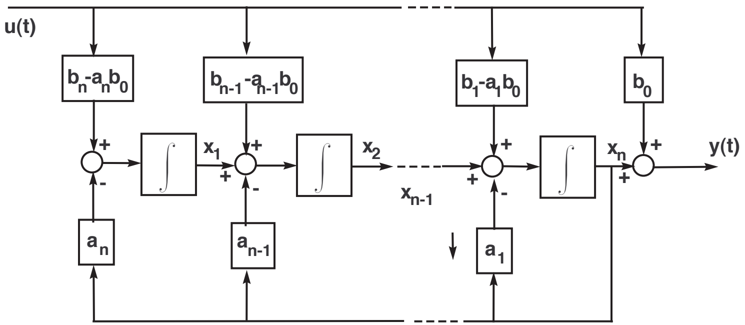


Figura 6: Representación gráfica de la forma canónica observable.

Forma canónica de Jordan

La elección de las variables de estado se basa en el principio de superposición de sistemas lineales, es decir, se busca la descomposición de la respuesta del sistema lineal en sus componentes individuales.

- Consideremos que la función de transferencia del sistema sea

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{61}$$

  donde $m \leq n$.

- Supongamos que el denominador de dicha función de transferencia no tiene raices múltiples, con lo que descomponiendo en fracciones parciales se obtiene que

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)} \\ &= \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \ldots + \frac{c_n}{s-\lambda_n} \end{aligned} \tag{62}$$

- 62 es una combinación lineal de n componentes elementales más un término directamente relacionado con la entrada que aparece en el caso de que $n = m$

$$Y(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} U(s) + \frac{c_2}{s - \lambda_2} U(s) + \ldots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} U(s) + \frac{b_n}{a_n} U(s) \quad (63)$$

- Cada una de estas componentes elementales de la ecuación anterior es la respuesta de un sistema con función de transferencia

$$G_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} \quad (64)$$

a la señal de entrada $U(s)$. Esto implica que si cada una de estas componentes básicas la tomamos como una variable de estado $X_i(s)$ que satisface $X_i(s) = G_i(s)U(s)$, la variable de estado $x_i(t)$ así definida satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = \lambda_i x_i(t) + u(t) \quad (65)$$

Forma canónica de Jordan

Cont.

- Tenemos, por tanto, n ecuaciones diferenciales como la 65 que constituyen las ecuaciones de estado y una ecuación de salida que en el dominio del tiempo tiene la forma

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_n x_n(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t) \tag{66}$$

y formulando las ecuaciones en forma matricial tendremos:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{67}$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2 \ \ldots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \frac{b_n}{a_n} u(t) \tag{68}$$

Forma canónica de Jordan

- Si en la forma canónica de Jordan todas las raíces del denominador son simples, se la conoce con el nombre de *forma canónica diagonal*. En la figura se muestra una representación gráfica de la forma canónica diagonal de unsistema.

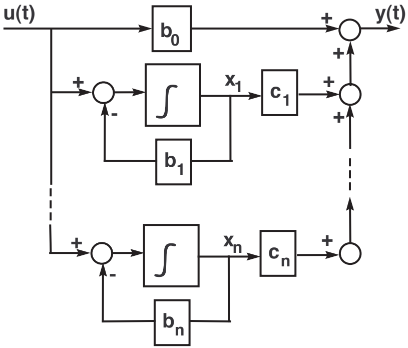


Figura 7: Representación gráfica de la forma canónica de diagonal.

Forma canónica de Jordan

- En el caso de que la ecuación característica del sistema tenga raíces múltiples, la descomposición en fracciones parciales da lugar a una expresión del siguiente tipo

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n (s-\lambda_1)^k (s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)} \\
&= \frac{c_1}{(s-\lambda_1)^k} + \ldots + \frac{c_k}{s-\lambda_1} + \frac{c_{k+1}}{s-\lambda_2} + \ldots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}
\end{aligned} \tag{69}
$$

- Si suponemos que las condiciones iniciales son nulas, la respuesta del sistema ante una entrada $U(s)$ será

$$
Y(s) = \frac{c_1}{(s-\lambda_1)^k}U(s) + \ldots + \frac{c_k}{s-\lambda_1}U(s) + \frac{c_{k+1}}{s-\lambda_2}U(s) + \ldots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}U(s) \tag{70}
$$

- Tomando como vectores de estado cada una de las fracciones que aparecen en la ecuación 70 tendremos

$$
\begin{aligned}
X_1(s) &= \frac{c_1}{(s-\lambda_1)^k}U(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1}X_2(s) \\
X_2(s) &= \frac{c_2}{(s-\lambda_1)^{k-1}}U(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1}X_3(s) \\
&\vdots \\
X_k(s) &= \frac{c_k}{s-\lambda_1}U(s) \\
X_{k+1}(s) &= \frac{c_{k+1}}{s-\lambda_2}U(s) \\
&\vdots \\
X_n(s) &= \frac{c_n}{s-\lambda_n}U(s)
\end{aligned}
\tag{71}
$$

- Reescribiendo las ecuaciones anteriores 71 en el dominio del tiempo nos quedará el sistema expresado como conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden

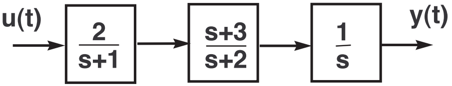
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x_1(t) &= \lambda_1 x_1(t) + x_2(t)\\
\frac{d}{dt}x_2(t) &= \lambda_1 x_2(t) + x_3(t)\\
&\vdots\\
\frac{d}{dt}x_k(t) &= \lambda_1 x_k(t) + u(t)\\
\frac{d}{dt}x_{k+1}(t) &= \lambda_2 x_{k+1}(t) + u(t)\\
&\vdots\\
\frac{d}{dt}x_n(t) &= \lambda_n x_n(t) + u(t) \qquad (72)
\end{aligned}$$

- Y puesto este conjunto de ecuaciones en forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ x_{k+1}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ x_{k+1}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{73}$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_k \ c_{k+1} \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ x_{k+1}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \frac{b_n}{a_n} u(t) \tag{74}$$

Dado el sistema mostrado en la figura, obtener las formas canónicas de Jordan, controlable y observable.



Solución:

- *Forma canónica de Jordan.* Obtenemos en primer lugar la función de transferencia global del sistema

$$F(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{-4}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s}$$

y de aquí tenemos que, tomando como variables de estado las fracciones parciales $X_1(s) = \frac{-4}{s+1}U(s)$, $X_2(s) = \frac{1}{s+2}U(s)$ y $X_3(s) = \frac{3}{s}U(s)$, obtenemos la siguiente representación de estado

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [-4 \ 1 \ 3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- *Forma canónica controlable*. Partiendo de la función de transferencia $F(s)$ del sistema

$$F(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{2s+6}{s^3+3s^2+2s}$$

obtenemos que los coeficientes del polinomio del denominador son $a_3 = 1,\ a_2 = 3,\ a_1 = 2,\ a_0 = 0$ y los del numerador $b_1 = 2,\ b_0 = 6$. Sustituyendo estos coeficientes en la expresión de la forma canónica controlable obtenemos

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [6\ 2\ 0]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Representación en las formas canónicas

Ejemplo (Cont.)

- *Forma canónica observable*. Partiendo de los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador de la función de transferencia que hemos obtenido y sustituyendo en la expresión de la forma canónica observable se llega a

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Conversión de una ecuación en diferencias a ecuaciones de estado

Es un proceso similar al visto para sistemas expresados por ecuaciones diferenciales, pero se trabaja a partir de la transformada z o de la expresión en diferencias y utilizando el operador retardo para expresar en forma polinómica las ecuaciones de estado.

- Dado un sistema invariante en el tiempo, con una única entrada u y una única señal de salida y, cuya dinámica viene dada por una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$a_n y(k-n)+\ldots+a_1 y(k-1)+a_0 y(k) = b_m u(k-m)+\ldots+b_1 u(k-1)+b_0 u(k) \tag{75}$$

  con $n \geq m$.

- Si introducimos el operador retardo q^{-1} la expresión anterior podemos reescribirla

$$\begin{aligned} a_n q^{-n} y(k) + \ldots + a_1 q^{-1} y(k) + a_0 y(k) = \\ b_m q^{-m} u(k) + \ldots + b_1 q^{-1} u(k) + b_0 u(k) \end{aligned} \tag{76}$$

Conversión de una ecuación en diferencias a ecuaciones de estado

Cont.

- Sacando $y(t)$ y $u(t)$ como factor común en ambos lados de la expresión, obtenemos:

$$(a_n q^{-n} + \ldots + a_1 q^{-1} + a_0)y(k) = (b_m q^{-m} + \ldots + b_1 q^{-1} + b_0)u(k) \quad (77)$$

- que podemos expresar de forma más compacta como un cociente de polinomios de la forma

$$y(k) = \frac{N(q)}{M(q)} u(k) \quad (78)$$

- A partir de aquí es posible realizar un desarrollo similar al hecho para el caso de sistemas en tiempo continuo, y se llegaría a las mismas expresiones.

Conversión de una ecuación en diferencias a ecuaciones de estado

Ejemplo

Dado un sistema cuya función de transferencia es

$$F(z) = \frac{z^2 + 0{,}4z + 3}{z^3 + 1{,}9z^2 + 1{,}08z + 0{,}18}$$

determinemos las formas canónicas controlable, observable y de Jordan.
Solución:

- *Forma canónica controlable*. De $F(z)$ obtenemos que los coeficientes del polinomio del denominador son $a_3 = 1,\ a_2 = 1{,}9,\ \ a_1 = 1{,}08$, $a_0 = 0{,}18$ y los del numerador $b_2 = 1,\ b_1 = 0{,}4,\ b_0 = 3$, y de aquí:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}18 & -1{,}08 & -1{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [3\ 0{,}4\ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- *Forma canónica observable*. Partiendo de los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador de la función de transferencia se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}18 \\ 1 & 0 & -1{,}08 \\ 0 & 1 & -1{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}4 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0\ 0\ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Conversión de una ecuación en diferencias a ecuaciones de estado
Ejemplo (Cont.)

- *Forma canónica de Jordan.* Si obtenemos las raíces del denominador de la función de transferencia del sistema y expandimos

$$F(z) = \frac{z^2 + 0{,}4z + 3}{(z+1)(z+0{,}6)(z+0{,}3)} = \frac{12{,}85}{z+1} + \frac{-26}{z+0{,}6} + \frac{14{,}14}{z+0{,}3}$$

y tomando como variables de estado las fracciones parciales $X_1(z) = \frac{12{,}85}{z+1}U(z)$, $X_2(z) = \frac{26}{z+0{,}6}U(z)$ y $X_3(z) = \frac{14{,}14}{z+0{,}3}U(z)$, obtenemos la siguiente representación de estado

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [12{,}85 \;\; -26 \;\; 14{,}14] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Transformaciones entre representaciones

- Sea un sistema definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \tag{79}$$

  queremos pasar de una representación de estado dada a otra.
- Si definimos un nuevo vector de estado $\mathbf{x}'(k)$ de forma que

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\mathbf{x}'(k) \tag{80}$$

  donde $\mathbf{T}$ es una matriz *no singular*, es decir, invertible, las nuevas variables $\mathbf{x}'(k)$ se pueden expresar como combinación lineal de las $\mathbf{x}(k)$.
- Si sustituimos, obtenemos

$$\mathbf{T}\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{81}$$

  y premultiplicando por la inversa de la matriz de transformación se tiene que

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{82}$$

- con lo que si denominamos

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} && (83) \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} && (84) \end{aligned}$$

nos queda que el nuevo sistema es

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{G}'\mathbf{x}'(k) + \mathbf{H}'\mathbf{u}(k) \quad (85)$$

- Procediendo de forma similar para la ecuación de salida

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (86)$$

y denominando

$$\begin{aligned} \mathbf{C}' &= \mathbf{C}\mathbf{T} && (87) \\ \mathbf{D}' &= \mathbf{D} && (88) \end{aligned}$$

obtenemos una nueva representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(k+1) &= \mathbf{G}'\mathbf{x}'(k) + \mathbf{H}'\mathbf{u}(k) && (89) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}'\mathbf{x}'(k) + \mathbf{D}'\mathbf{u}(k) && (90) \end{aligned}$$

Igualdad de la ecuación característica para diferentes representaciones de estado

- Dos representaciones de estado son similares si tienen el mismo polinomio característico, y por tanto, los mismos valores propios o autovalores. Veamos que esto se verifica para el caso anterior:

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G}'| &= |z\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}| \\ &= |z\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1}||z\mathbf{I} - \mathbf{G}||\mathbf{T}| \\ &= |z\mathbf{I} - \mathbf{G}| \end{aligned} \tag{91}$$

- Es decir, la ecuación característica de la matriz y sus autovalores, no dependen de la base elegida para representar el sistema en el espacio de estados.
- Sólo se requiere que la matriz de transformación sea no singular, por lo que existen infinitas representaciones de estado.

Transformación a la forma canónica controlable

- Dado un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) && (92) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) && (93) \end{aligned}$$

puede ser transformado a la **forma canónica controlable** por medio de la matriz de transformación

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \tag{94}$$

donde $\mathbf{M} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{G}\mathbf{H} \ldots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$ y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{95}$$

donde los a_i de $\mathbf{W}$ son los coeficientes de la ecuación característica:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{96}$$

Transformación a la forma canónica observable

- Dado un sistema de la forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \qquad (97)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \qquad (98)$$

puede ser transformado a la **forma canónica observable** por medio de

$$\mathbf{T} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} \qquad (99)$$

donde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \quad \mathbf{G}^* C^* \ldots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] \qquad (100)$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (101)$$

siendo los a_i de $\mathbf{W}$ los coeficientes de la ecuación característica: 96.

- Sea el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1\ 2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

- Obtener las matrices de transformación **T** que nos permiten convertir esta representación a las formas canónicas controlable y observable.

Solución:
La ecuación característica de este sistema es

$$|zI - G| = z^2 + 2z + 1 = 0$$

y por tanto los coeficientes del polinomio son $a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = 1$.

- **Forma canónica observable**. La matriz de transformación era $T = (WN^*)^{-1}$. Tenemos

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{G}^* C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Con lo que la matriz de transformación será

$$\mathbf{T} = (\mathbf{W}N^*)^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Las matrices $\mathbf{G}', \mathbf{H}', \mathbf{C}'$ del sistema transformado son las siguientes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}' &= \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

y el sistema una vez transformado

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}'(k+1) &= \mathbf{G}'\mathbf{x}'(k) + \mathbf{H}'u(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}'(k) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \mathbf{C}'\mathbf{x}'(k) = [0\ 1]\mathbf{x}'(k)
\end{aligned}
$$

- **Forma canónica controlable.** La matriz de transformación para pasar a la forma canónica controlable es $T = MW$. Tenemos

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- con lo que la matriz de transformación será

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Las matrices $\mathbf{G}', \mathbf{H}', \mathbf{C}'$ del sistema transformado son las siguientes

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}' &= \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Transformación a la forma canónica de Jordan

- Cuando la matriz $\mathbf{G}$ del sistema tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ diferentes, la matriz $\mathbf{G}'$ de la forma canónica de Jordan es una matriz diagonal, de la forma

$$\mathbf{G}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda \tag{102}$$

- La matriz de transformación $\mathbf{T}$ se obtiene a partir de los vectores propios $\mathbf{v}_i$ correspondientes a los valores propios λ_i que cumplen la ecuación característica $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$, y por tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{v}_1 &= \lambda_1\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{G}\mathbf{v}_2 &= \lambda_2\mathbf{v}_2 \\ \vdots &= \vdots \\ \mathbf{G}\mathbf{v}_n &= \lambda_n\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{103}$$

- La matriz de transformación **T** se obtiene a partir de la expresión 103, reformulándola en forma matricial como:

$$\mathbf{G}[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{104}$$

y llamando **T** a la matriz cuyas columnas son los vectores propios,

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_n] \tag{105}$$

el conjunto de igualdades 104 puede expresarse como

$$\mathbf{GT} = \mathbf{T}\Lambda \tag{106}$$

donde $\Lambda = \mathbf{G}'$ es la matriz diagonal que se desea obtener como resultado de la transformación.

- Sea un sistema cuya representación de estado es

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- Obtener la matriz de transformación **T** que nos permite convertir esta representación a la forma canónica de Jordan.

Solución:
La ecuación característica de este sistema viene dada por

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{G}| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

y por tanto los autovalores son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$. La matriz de transformación para pasar a la forma canónica diagonal (puesto que las raíces son simples) se obtiene a partir de los vectores propios obtenidos a partir de la siguiente expresión $\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i\lambda_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} \lambda_i \qquad (107)$$

y donde $T = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$. Sustituyendo en 107 los λ_i por su valor obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

- $\lambda_1 = 1$
  - El sistema de ecuaciones 107 queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_{11} \\ v_{11} - v_{12} &= v_{12} \\ v_{12} + 2v_{13} &= v_{13} \end{aligned}$$

    cuya solución nos indica que v_{11} se puede elegir arbitrariamente y que $v_{12} = \frac{1}{2}v_{11}$ y $v_{13} = -v_{12}$.
  - Tomando $v_{11} = 2$ nos queda que $v_{12} = 1$ y $v_{13} = -1$, con lo que el vector propio $\mathbf{v}_1$ será

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{108}$$

- $\lambda_2 = -1$
  - El sistema de ecuaciones 107 queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_{21} &= -v_{21} \\ v_{21} - v_{22} &= -v_{22} \\ v_{22} + 2v_{23} &= -v_{23} \end{aligned}$$

    cuya solución nos indica que v_{22} se puede elegir arbitrariamente y que $v_{23} = \frac{-1}{3} v_{22}$ y $v_{21} = 0$.
  - Tomando $v_{22} = 3$ nos queda que $v_{23} = -1$, con lo que el vector propio $\mathbf{v}_2$ será

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{109}$$

- $\lambda_3 = 2$
  - El sistema de ecuaciones 107 queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_{31} &= 2v_{31} \\ v_{31} - v_{32} &= 2v_{32} \\ v_{32} + 2v_{33} &= 2v_{33} \end{aligned}$$

    cuya solución nos indica que v_{33} se puede elegir arbitrariamente y que $v_{31} = 0$ y $v_{32} = 0$.
  - Tomando $v_{33} = 1$ nos queda que el vector propio $\mathbf{v}_3$ será

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{110}$$

- La matriz de transformación **T** es

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{111}$$

y su inversa

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \tag{112}$$

- Las matrices $\mathbf{G}', \mathbf{H}', \mathbf{C}'$ del sistema transformado son las siguientes

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}' &= \mathbf{C}\mathbf{T} = [1\ 2\ 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [3\ 5\ 1]
\end{aligned} \tag{113}$$