uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Ingeniería de Control II

Tema 8:
Solución de la Ecuación de Estado

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido,

2025

Contenido

- Si consideramos un sistema lineal invariante en el tiempo definido por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\mathbf{A} : n \times n$, $\mathbf{B} : n \times r$, $\mathbf{C} : m \times n$ y $\mathbf{D} : m \times r$ y los vectores $\mathbf{x}(t) : n \times 1$,$\mathbf{u}(t) : r \times 1$ e $\mathbf{y}(t) : m \times 1$.

- Suponiendo $\mathbf{x}(t_0)$ es conocido y que se conoce la señal de entrada al sistema $\mathbf{u}(t)$ para $t \geq t_0$. Se trata de determinar el vector $\mathbf{x}(t)$ para $t > t_0$.
- La ecuación homogénea correspondiente a la ecuación 1 es

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{2}$$

cuya solución viene dada por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) \tag{3}$$

donde $\mathbf{x}(t_0)$ es el vector de condiciones iniciales.

- La matriz $e^{\mathbf{A}t}$ puede obtenerse desarrollando en serie de potencias como

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots \tag{4}$$

- Si definimos una nueva matriz Φ de la siguiente manera

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} \tag{5}$$

la ecuación 3 puede reescribirse como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{6}$$

- La solución de la ecuación no-homogénea 1 será de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{C}_1(t) \tag{7}$$

- Diferenciando la ecuación anterior con respecto a t obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\Phi(t-t_0)\mathbf{C}_1(t) + \Phi(t-t_0)\frac{d}{dt}\mathbf{C}_1(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \Phi(t-t_0)\frac{d}{dt}\mathbf{C}_1(t) \end{aligned} \tag{8}$$

y si comparamos la ecuación 8 con la 1, se puede observar que

$$\Phi(t-t_0)\frac{d}{dt}\mathbf{C}_1(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{9}$$

Despejando el término en $\frac{d}{dt}\mathbf{C}_1(t)$ e integrándolo entre t_0 y t

$$\mathbf{C}_1(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau - t_0)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{C}_2 \tag{10}$$

con lo que tenemos que la solución de la ecuación de estado será

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \Phi(t-t_0)\mathbf{C}_1(t) = \Phi(t-t_0)[\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau-t_0)\mathbf{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{C}_2] \\
&= \Phi(t-t_0)\mathbf{C}_2 + \Phi(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau-t_0)\mathbf{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (11)
\end{aligned}
$$

- y dado que

$$\Phi(t-t_0)\Phi^{-1}(\tau-t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} = e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = \Phi(t-\tau) \qquad (12)$$

la ecuación 11 puede expresarse como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{C}_2 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (13)$$

- Queda por calcular el vector constante $\mathbf{C}_2$. Dicho vector lo calcularemos a partir de las condiciones iniciales en el instante t_0.
- Para ello, si particularizamos la solución de la ecuación de estado que hemos obtenido en 13 para el instante t_0, y dado que la integral entre t_0 y t tiene valor nulo, tendremos que

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(0)\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2 \tag{14}$$

por lo tanto, la forma resultante de la solución de la ecuación de estado será

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{15}$$

- La matriz $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ se conoce como *matriz fundamental* del sistema o matriz de transición.

- Un método más eficaz de resolver la ecuación de estado puede obtenerse aplicando la transformada de Laplace.
- Supongamos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{16}$$

Tomando transformadas de Laplace obtenemos que

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{17}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{18}$$

- De la ecuación 17 se deduce que

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{19}$$

- Haciendo la antitransformada de Laplace de la expresión anterior tendremos que

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \tag{20}$$

- Comparando esta expresión con la solución de la ecuación de estado obtenida en 15 se puede observar que:
  - El primer término de la ecuación 20 es la solución de la ecuación homogénea para $\mathbf{u}(t) = 0$.
  - Y el segundo término representa la solución particular correspondiente a la ecuación no homogénea con entrada $\mathbf{u}(t)$ distinta de cero.
  - Por otra parte, resulta fácil obtener la expresión de la matriz fundamental $\Phi(t)$ en función de la antitransformada de Laplace, ya que igualando los primeros términos de las ecuaciones 20 y 15 resulta

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \tag{21}$$

lo que implica que

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \tag{22}$$

- Supongamos el siguiente sistema

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \tag{23}$$

Obtener la solución de la ecuación de estado para el sistema sometido a una entrada escalón unitario y con estado inicial nulo.

- **Solución**:
La solución de la ecuación de estado, utilizando la transformada de Laplace, viene dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \tag{24}$$

en la que el primer término se anula puesto que el sistema tiene condiciones iniciales nulas. La solución queda entonces reducida a la siguiente expresión

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \tag{25}$$

- Obtenemos en primer lugar $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ y su inversa:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \tag{27}$$

- y a partir de esta expresión tenemos que la respuesta del sistema en el campo de Laplace viene dada por

$$\mathbf{X}(s) = [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s(s+2)(s+3)} \\ \frac{2}{s(s+3)} \end{bmatrix} \tag{28}$$

- Haciendo la antitransformada de Laplace obtenemos la solución de la ecuación de estado.

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s+5}{s(s+2)(s+3)} \\ \frac{2}{s(s+3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Discretización de las ecuaciones de estado en tiempo continuo

- El control de sistemas basado en técnicas de espacio de estados se realiza siempre mediante computador, es decir, en tiempo discreto.
- Es necesario obtener modelos de estado discretos a partir de los modelos de estado en tiempo continuo de un sistema expresado normalmente por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{30}$$

- Lo que se busca es obtener un modelo discretizado de 30 de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k). \end{aligned} \tag{31}$$

Discretización de las ecuaciones de estado

- Esta discretización podemos realizarla de dos formas:
  - *Método Indirecto*. Se basa en discretizar de forma convencional la función de transferencia del sistema, para lo cual se obtiene la función de transferencia del sistema, se introducen en él un bloqueador y un muestreador, y a continuación, se obtiene la función de transferencia discreta del sistema para un cierto periodo de muestreo T. En un segundo paso, se convierte la función de transferencia discreta a una representación de estado discreta por medio de alguno de los métodos que hemos visto anteriormente.
  - *Método Directo*. En este método buscamos obtener de forma directa las expresiones de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ a partir de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de la representación de estado en tiempo continuo.

- Habíamos visto en 15 que la solución de la ecuación de estado continua era

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (32)$$

- Suponemos que las variables de entrada son muestreadas y se llevan a un bloqueador de orden cero, por lo que permanecen constantes hasta el siguiente muestreo, es decir, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0 + kT)$ para $t_0 + kT \leq t < t_0 + (k+1)T$. Entonces ecuación de estado en el instante $t_0 + kT$ es:

$$\mathbf{x}(t_0 + kT) = e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+kT} e^{\mathbf{A}(t_0+kT-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (33)$$

y en $t_0 + (k+1)T$ es:

$$\mathbf{x}(t_0+(k+1)T) = e^{\mathbf{A}(k+1)T}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+(k+1)T} e^{\mathbf{A}(t_0+(k+1)T-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (34)$$

- Si en la expresión 34 consideramos como estado inicial el correspondiente al instante de tiempo $t_0 + kT$, la expresión queda

$$\mathbf{x}(t_0+(k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(t_0+kT)+\int_{t_0+kT}^{t_0+(k+1)T} e^{\mathbf{A}(t_0+(k+1)T-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (35)$$

- Suponiendo por simplicidad que $t_0 = 0$ la expresión anterior se puede expresar como

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (36)$$

- y si en el término integral de la ecuación anterior hacemos el cambio de variable $\tau = kT + t$, la expresión resultante es

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}(T-t)}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT+t)\mathrm{d}t \quad (37)$$

- Como las señales de entrada son muestreadas y se mantienen constantes todo el intervalo, $\mathbf{u}(kT+t)=\mathbf{u}(kT)$, la ecuación 37 queda

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-t)}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)\mathrm{d}t \tag{38}$$

y haciendo $\lambda = T - t$, la ecuación 38 se transforma en

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)\mathrm{d}\lambda \tag{39}$$

- Comparando esta expresión con la ecuación de estado para un sistema de tiempo discreto en el instante $k+1$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{40}$$

se tiene que

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} \tag{41}$$

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathrm{d}\lambda\right)\mathbf{B} \tag{42}$$

- En el caso de que la matriz **A** sea *no singular*, la expresión 42 puede simplificarse. Para ello resolvemos la integral, dando como resultado

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}(T) &= \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} \mathrm{d}\lambda\right)\mathbf{B} \\
&= \mathbf{A}^{-1}[e^{\mathbf{A}T} - e^{\mathbf{A}0}]\mathbf{B} \\
&= \mathbf{A}^{-1}[e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}]\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{43}
$$

Discretización de la ecuación de estado por el método directo

Ejemplo

- Supongamos el sistema

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

  y queremos calcular su equivalente discreto.

- **Solución:**
  - La matriz fundamental para este sistema, utilizando la transformada de Laplace, viene dada por

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

  - Obtenemos en primer lugar $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ y su inversa:

$$\begin{aligned} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}] &= \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \\ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Discretización de la ecuación de estado por el método directo

Ejemplo (Cont.)

- La matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema es

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

- A partir de la matriz fundamental se obtienen las matrices $\mathbf{G}(T)$ y $\mathbf{H}(T)$ del sistema en la representación de estado de tiempo discreto con periodo T, resultando

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} e^{-2T} & e^{-2T}-e^{-3T} \\ 0 & e^{-3T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(T) &= \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathrm{d}\lambda\right)\mathbf{B} = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-2\lambda} & e^{-2\lambda}-e^{-3\lambda} \\ 0 & e^{-3\lambda} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} d\lambda \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-3}{2}e^{-2T}+\frac{2}{3}e^{-3T}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3}e^{-3T}+\frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Solución de la ecuación de estado en tiempo discreto

- Dado un sistema representado por las ecuación de estado en tiempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{Hu}(k) \qquad (44) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) \qquad (45) \end{aligned}$$

la solución de la ecuación de estado puede obtenerse directamente sin más que expresar la ec de estado de forma recursiva

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{Gx}(0) + \mathbf{Hu}(0) \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{Gx}(1) + \mathbf{Hu}(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{GHu}(0) + \mathbf{Hu}(1) \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{Gx}(2) + \mathbf{Hu}(2) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^2\mathbf{Hu}(0) + \mathbf{GHu}(1) + \mathbf{Hu}(2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

con lo que la expresión recursiva para k queda de la siguiente forma

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{Hu}(j) \qquad (46)$$

Solución de la ecuación de estado en tiempo discreto

- En la ecuación 46 se puede observar que el estado del sistema en el instante k tiene dos componentes básicas:
  - Una de ellas depende del estado inicial del sistema en el instante 0
  - Y la otra depende de la secuencia de entradas de control que recibe el sistema hasta el instante k.
- A partir de la expresión anterior es posible expresar la salida del sistema como

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{47}$$

- Es posible utilizar las ecuaciones 46 y 47 para conocer el valor de las variables de estado y de salida en cualquier instante de tiempo k, pero **no es una expresión fácil de calcular**.

- Un método más eficaz de resolver las ecuaciones de estado discretas es el basado en la transformada en z. Dada la ecuación de estado

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{48}$$

si tomamos transformadas en z, resulta

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \tag{49}$$

donde $\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{x}(k)]$ y $\mathbf{U}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{u}(k)]$. Y agrupando los términos en $\mathbf{X}(z)$ tendremos que

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \tag{50}$$

Multiplicando los términos de esta ecuación por la matriz $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ nos queda que

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z) \tag{51}$$

Solución de la ecuación de estado en tiempo discreto

- Haciendo la antitransformada en z

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z]\mathbf{x}(0) + \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)] \tag{52}$$

- Comparando las expresiones 46 con 52 se puede deducir que

$$\mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z] \tag{53}$$

y que

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)] \tag{54}$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$

Solución de la ecuación de estado en tiempo discreto

Ejemplo

- Supongamos el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

- **Solución**:
  - La matriz $\mathbf{G}^k$ para este sistema, utilizando la transformada z, viene dada por

$$\mathbf{G}^K = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z]$$

  - Obtengamos en primer lugar $[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]$ y su inversa:

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} z - 0{,}8 & 0 \\ 0 & z - 0{,}5 \end{bmatrix}; \quad [z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-0{,}8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-0{,}5} \end{bmatrix}$$

- La matriz fundamental $\mathbf{G}^k$ será

$$\mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1}z] = \mathcal{Z}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{z}{z-0{,}8} & 0 \\ 0 & \frac{z}{z-0{,}5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8^k & 0 \\ 0 & 0{,}5^k \end{bmatrix}$$

- El efecto de la entrada sobre el sistema hasta el instante k se obtiene aplicando la transformada z por medio de la expresión siguiente y suponiendo que la entrada es un escalón unitario

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) &= \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)] \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{z-0{,}8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-0{,}5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{z}{z-1}\right) \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{z}{(z-0{,}8)(z-1)} \\ \frac{2z}{(z-0{,}5)(z-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\cdot 0{,}8^k + 5 \\ -2\cdot 0{,}5^k + 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Con lo que la respuesta del sistema para un instante de tiempo k cualesquiera se podrá obtener como:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8^k & 0 \\ 0 & 0{,}5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \cdot 0{,}8^k + 5 \\ -2 \cdot 0{,}5^k + 4 \end{bmatrix}$$