Ingeniería de Control II

Problemas Tema 9: Control por realimentación de estado

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido

6 de febrero de 2025

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Ejercicio 1 (1/2)

Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

determinar la secuencia u(0), u(1), u(2) para que el sistema pase del estado $(0,1,0)^T$ en el instante 0 al estado $(1,1,2)^T$ en el instante 3.

Solución:

Primero hay que calcular la matriz de controlabilidad para ver si el sistema es completamente controlable en estado.

$$M_c = \begin{bmatrix} H & GH & G^2H \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad GH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$G^2H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad det(M_C) = -12$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad es 3, el sistema es completamente controlable en estado.

Pasamos a calcular la solución pedida mediante la siguiente expresión:

$$x\,(n) - G^n x\,(0) = M_C \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \dots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1\,(3) \\ x_2\,(3) \\ x_3\,(3) \end{bmatrix} - G^3 \begin{bmatrix} x_1\,(0) \\ x_2\,(0) \\ x_3\,(0) \end{bmatrix} = M_C \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} u\,(2) + u\,(1) + u\,(0) = 1 \\ 2u\,(2) - 2u\,(1) + 2u\,(0) = 2 \\ u\,(2) + 2u\,(1) + 4u\,(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema para obtener la secuencia de entradas buscada:

$$u\,(0) = 0{,}3333 \quad u\,(1) = 0 \quad u\,(2) = 0{,}6667$$

Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

determinar la secuencia u(o), u(1), u(2) para que el sistema pase del estado $(0,0,0)^T$ en el instante 0 al estado $(3,2,2)^T$ en el instante 3.

Solución:

Primero hay que calcular la matriz de controlabilidad para ver si el sistema es completamente controlable en estado.

$$M_c = \begin{bmatrix} H & GH & G^2H \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad GH = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G^2H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad det(M_C) = 0$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad es 2, el sistema no es completamente controlable en estado.

Pasamos a calcular la solución pedida mediante la siguiente expresión:

$$x\left(n\right)-G^{n}x\left(0\right)=M_{C}\begin{bmatrix}u(n-1)\\u(n-2)\\\dots\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\left(3\right)\\x_2\left(3\right)\\x_3\left(3\right)\end{bmatrix}-G^3\begin{bmatrix}x_1\left(0\right)\\x_2\left(0\right)\\x_3\left(0\right)\end{bmatrix}=M_C\begin{bmatrix}u(2)\\u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&8&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&2\\1&2&4\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(2)\\u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c}2u\left(2\right)-2u\left(1\right)+2u\left(0\right)=3\\u\left(2\right)+2u\left(1\right)+4u\left(0\right)=2\\2=0\end{array}\right\}$$

Se observa que la tercera ecuación no se cumple, luego el tercer estado no es alcanzable. Lo que sí será posible es alcanzar los valores deseados para los dos primeros estados.
Tenemos un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, cuya solución en función de u(0) es:

$$u\left(1\right)=\tfrac{1}{6}-u(0)\quad u\left(2\right)=\tfrac{5}{3}-2u(0)$$

Si fijamos u(0)=1:

$$u\left(0\right)=1\quad u\left(1\right)=\tfrac{-5}{6}\quad u\left(2\right)=\tfrac{-1}{3}$$

Ejercicio 3 (1/3)

3) Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

determinar si es completamente controlable en salida, y calcular la secuencia u(o), u(1), u(2) para que el sistema con estado inicial $(0,0,0)^T$ **tenga una salida** $y(k) = (2,2)^T$ **en el instante 3.**
¿Qué pasaría si el valor de C cambia y pasa a ser el siguiente?

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

Primero hay que calcular la matriz de controlabilidad de la salida para ver si el sistema es completamente controlable en salida.

$$M_c = \begin{bmatrix} CH & CGH & CG^2H \end{bmatrix}$$

$$M_{CS} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad rango(M_{CS}) = 2$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad de la salida es 2, el sistema es completamente controlable en salida.

Pasamos a calcular la solución pedida mediante la siguiente expresión:

$$y\left(n\right)-CG^{n}x\left(0\right)=M_{CS}\begin{bmatrix}u(n-1)\\u(n-2)\\\dots\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1(3)\\y_2(3)\end{bmatrix}-CG^3\begin{bmatrix}x_1\left(0\right)\\x_2\left(0\right)\\x_3\left(0\right)\end{bmatrix}=M_{CS}\begin{bmatrix}u(2)\\u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&-8&-2\\-6&-8&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3&3\\-1&-2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(2)\\u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}4u\left(2\right)-3u\left(1\right)+3u\left(0\right)=2\\-u\left(2\right)-2u\left(1\right)+6u\left(0\right)=2\end{matrix}\right\}$$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, cuya solución en función de u(0) es:

$$u\left(1\right)=\tfrac{-10}{11}+\tfrac{27}{11}u(0)\quad u\left(2\right)=\tfrac{-2}{11}+\tfrac{12}{11}u(0)$$

Si fijamos u(0)=1:

$$u\left(0\right)=1\quad u\left(1\right)=\tfrac{17}{11}\quad u\left(2\right)=\tfrac{-10}{11}$$

Si el valor de C cambia, volvemos a calcular el valor de la matriz de controlabilidad en salida:

$$M_{CS}=\begin{bmatrix}4&-3&3\\8&-6&6\end{bmatrix}\quad rango(M_{CS})=1$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad de la salida es 1, el sistema no es completamente controlable en salida.
Pasamos a calcular la solución pedida:

$$\begin{bmatrix} y_1(3) \\ y_2(3) \end{bmatrix} - CG^3 \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = M_{CS} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 8 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4u(2) - 3u(1) + 3u(0) = 2 \\ 8u(2) - 6u(1) + 6u(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Vemos que tenemos un sistema que no tiene solución. Si lo ponemos en función de una salida genérica:

$$\begin{bmatrix} y_1(3) \\ y_2(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 8 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Se observa que una fila es linealmente dependiente de la otra, de tal forma que cuando fijamos una de las dos salidas, la otra depende de esta: $y_2(3) = 2y_1(3)$.

Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

determinar si es observable.

Solución:

Primero hay que calcular la matriz de observabilidad:

$$M_O = \begin{bmatrix} C & CG & CG^2 \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad CG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$CG^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad rango(M_O) = 3$$

Como el rango es tres, el sistema es completamente observable.

Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

determinar los valores de las ganancias de la matriz K de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en 0.2 y 0.5.

Solución:

Primero se comprueba si el sistema es completamente controlable en estado, para lo cual se calcula la matriz de controlabilidad:

$$M_c = \begin{bmatrix} H & GH \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix} \quad det(M_C) = 0{,}5$$

El sistema es completamente controlable en estado. Por lo tanto, es posible encontrar una realimentación de estado que cumpla las especificaciones por medio de la siguiente expresión:

$$|zI - G + HK| = (z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_n)$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| = (z - 0{,}2)(z - 0{,}5)$$

Si se resuelve este sistema se llega a los valores deseados de la matriz de ganancias K:

$$\left|\begin{bmatrix} z-1+k_1 & -0{,}5+k_2 \\ 0{,}5 & z-2 \end{bmatrix}\right| = z^2 - 0{,}7z + 0{,}1$$

$$z^2 + (k_1 - 3)\,z + (-2k_1 - 0{,}5k_2 + 2{,}25) = z^2 - 0{,}7z + 0{,}1$$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 2{,}3 \\ -2k_1 - 0{,}5k_2 &= -2{,}15 \end{aligned}\right\}$$

La solución será:

$$k_1 = 2{,}3 \quad k_2 = -4{,}9$$

Así, la matriz de ganancias buscada es:

$$K = [2{,}3 \ \ -4{,}9]$$

Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

determinar los valores de las ganancias de la matriz K de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en -0.8, -0.6 y 0.5.

Solución:

Primero se comprueba si el sistema es completamente controlable en estado, para lo cual se calcula la matriz de controlabilidad:

$$M_c = \begin{bmatrix} H & GH & G^2H \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad GH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G^2H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad det(M_C) = 4$$

El sistema es completamente controlable en estado. Por lo tanto, es posible encontrar una realimentación de estado que cumpla las especificaciones por medio de la siguiente expresión:

$$|zI - G + HK| = (z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n)$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right|$$
$$= (z - 0{,}5)(z + 0{,}8)(z + 0{,}6)$$

Si se resuelve este sistema se llega a los valores deseados de la matriz de ganancias K:

$$\left| \begin{bmatrix} 2k_1 + z - 1 & 2k_2 & 2k_3 \\ k_1 & k_2 + z + 1 & k_3 \\ k_1 & k_2 - 0{,}5 & k_3 + z - 0{,}5 \end{bmatrix} \right| = z^3 + 0{,}9z^2 - 0{,}22z - 0{,}24$$

$$z^3 + (2k_1 + k_2 + k_3 - 0{,}5)\, z^2 + (k_1 - 1{,}5k_2 + 0{,}5k_3 - 1)\, z$$
$$+ (-k_1 + 0{,}5k_2 - 1{,}5k_3 + 0{,}5) = z^3 + 0{,}9z^2 - 0{,}22z - 0{,}24$$

Tenemos un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\left. \begin{array}{r} 2k_1 + k_2 + k_3 = 1{,}4 \\ k_1 - 1{,}5k_2 + 0{,}5k_3 = 0{,}78 \\ -k_1 + 0{,}5k_2 - 1{,}5k_3 = -0{,}74 \end{array} \right\}$$

Ejercicio 6 (3/3)

La solución será:

$$k_1 = 0{,}72 \;\; k_2 = -0{,}04 \;\; k_3 = 0$$

Así, la matriz de ganancias buscada es:

$$K = [0{,}72 \;\; -0{,}04 \;\; 0]$$

Ejercicio 7

Determinar la observabilidad del sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Solución:

Para estimar la observabilidad hay que calcular la matriz de observbilidad:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Como el determinante de la matriz es 8, el rango será igual a tres y el sistema es completamente observable.

Ejercicio 8

Determinar la observabilidad del sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Solución:

Para estimar la observabilidad hay que calcular la matriz de observabilidad:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}64 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el determinante de la matriz es 0, el rango será igual a dos y el sistema no es completamente observable.

Dado el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Determinar los valores de la matriz K de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en $p_{1,2} = 0{,}6 \pm j0{,}6$.

Solución:

Primero comprobamos que el sistema es completamente controlable en estado mediante el la matriz de controlabilidad:

$$M_C = \begin{bmatrix} H & GH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Como tiene rango 2, el sistema es completamente controlable, por lo que es posible encontrar una matriz de realimentación de estado que cumpla con las condiciones. Esto se hace de acuerdo con la siguiente expresión:

$$|zI - G + HK| = (z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n) = 0$$

Habrá que encontrar la solución para el siguiente sistema:

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = z^2 - 1{,}2z + 0{,}72$$

$$z^2 + k_1 z - 1{,}1 - k_1 + 0{,}2k_2 = z^2 - 1{,}2z + 0{,}72$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -1{,}2 \\ -1{,}1 - k_1 + 0{,}2k_2 &= 0{,}72 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} k_1 &= -1{,}2 \\ k_2 &= 3{,}1 \end{aligned}$$

Finalmente, la matriz de realimentación de estado necesaria será:

$$K = \begin{bmatrix} -1{,}2 & 3{,}1 \end{bmatrix}$$

Si se incluye una ganancia k_0 para ajustar el error de régimen permanente, calcular el valor de dicha ganancia para que la salida tenga valor 1 cuando la entrada es un escalón unitario.

La función de transferencia en lazo cerrado será:

$$F(z) = C(zI - G + HK)^{-1} H = \frac{0{,}2}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}72}$$

Su respuesta en régimen permanente ante entrada escalón unitario es:

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) R(z) * F(z)$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) \frac{z}{z-1} \frac{0{,}2}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}72} = 0{,}3846$$

Si se introduce una ganancia inicial, se puede ajustar para que el sistema tienda al valor deseado:

$$F(z) = C(zI - G + HK)^{-1} Hk_0 = \frac{0{,}2k_0}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}72}$$

Su respuesta en régimen permanente ante entrada escalón unitario es:

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) \frac{z}{z-1} \frac{0{,}2k_0}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}72} = 0{,}3846k_0 = 1$$

Despejando se obtiene el valor buscado:

$$k_0 = 2{,}6$$

Dado el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0 \\ 1{,}1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Determinar por transformación los valores de la matriz K de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en $p_{1,2} = 0{,}6 \pm j0{,}6$**. Para ello hay que pasar primero el sistema a la forma canónica controlable.**

Solución:

Primero comprobamos que el sistema es completamente controlable en estado mediante el la matriz de controlabilidad:

$$M_C = \begin{bmatrix} H & GH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}3 \\ 0 & 1{,}1 \end{bmatrix}$$

Como tiene rango dos, el sistema es completamente controlable.
Para pasar el sistema a la forma canónica controlable hay que calcular la función de transferencia:

$$F(z) = C(zI - G)^{-1} H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+0{,}3 & 0 \\ -1{,}1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(z) = \frac{2z - 0{,}9}{z^2 - 0{,}7z - 0{,}3}$$

Ejercicio 10 (2/4)

El sistema representado en la forma canónica controlable será:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} -0{,}9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz de controlabilidad para el sistema transformado:

$$M_C' = \begin{bmatrix} H' & G'H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

Pasamos ahora a calcular matriz de realimentación para la nueva representación:

$$|zI - G' + H'K'| = (z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1' & k_2' \end{bmatrix} \right| = z^2 - 1{,}2z + 0{,}72$$

$$z^2 + (k_2' - 0{,}7)z + k_1' - 0{,}3 = z^2 - 1{,}2z + 0{,}72$$

$$k_1' = 1{,}02$$
$$k_2' = -0{,}5$$

Es posible calcular la matriz de transformación T para obtener la matriz de ganancias en la representación inicial:

$$T = M_C \cdot M_C'^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1{,}1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como es invertible se puede calcular la matriz de realimentación:

$$K = K' T^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}02 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}9091 \\ 1 & 0{,}9091 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}4727 \end{bmatrix}$$

Si se incluye una ganancia k_0 para ajustar el error de régimen permanente, calcular el valor de dicha ganancia para que la salida tenga valor 1 cuando la entrada es un escalón unitario.

La función de transferencia para el sistema con realimentación de estado será:

$$F(z) = C(zI - G + HK)^{-1} H = \frac{2z - 0{,}9}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}72}$$

Su respuesta en régimen permanente ante entrada escalón unitario es:

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) R(z) * F(z)$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) \frac{z}{z-1} \frac{2z - 0{,}9}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}72} = 2{,}1154$$

Si se introduce una ganancia inicial, se puede ajustar para que el sistema tienda al valor deseado:

$$F(z) = C(zI - G + HK)^{-1} Hk_0 = \frac{(2z - 0{,}9)k_0}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}72}$$

Su respuesta en régimen permanente ante entrada escalón unitario es:

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) \frac{z}{z-1} \frac{(2z - 0{,}9)k_0}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}72} = 2{,}1154k_0 = 1$$

Despejando se obtiene el valor buscado:

$$k_0 = 0{,}4727$$

Dado el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Determinar los valores de la matriz K de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en $p_{1,2} = 0{,}6 \pm j0{,}6$.

Solución:

Primero se calcula la matriz de controlabilidad:

$$M_C = \begin{bmatrix} H & GH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & -1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Como tiene rango dos el sistema es completamente controlable en estado.

La matriz de realimentación de estado será:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Calculamos los valores de la matriz para que los polos estén en los lugares deseados

$$|zI - G + HK| = (z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_n) = 0$$

Habrá que encontrar la solución para el siguiente sistema:

Ejercicio 11 (2/2)

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \right| = z^2 - 1{,}2z + 0{,}72$$

$$z^2 + (k_{11} + 0{,}5k_{21})z - k_{11} + 0{,}2k_{12} - 0{,}5k_{21} + 0{,}1k_{22} - 1{,}1$$

$$= z^2 - 1{,}2z + 0{,}72$$

$$\left. \begin{array}{c} k_{11} + 0{,}5k_{21} \\ -k_{11} + 0{,}2k_{12} - 0{,}5k_{21} + 0{,}1k_{22} - 1{,}1 = 0{,}72 \end{array} \right\}$$

El sistema tiene dos ecuaciones y cuatro incógnitas, por lo que es posible fijar dos de las incógnitas y luego calcular las otra dos. Si tomamos $k_{11} = k_{12} = 1$, la matriz de realimentación de estado necesaria será:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4{,}4 & 48{,}2 \end{bmatrix}$$