uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Ingeniería de Control II

Tema 9:
Control por realimentación de estado

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido,

2025

Contenido

Planteamiento

- Esquema básico de control por realimentación de estado:
  - Diferencia: el regulador está en la realimentación
  - No utiliza la salida sino el estado para determinar la acción de control.

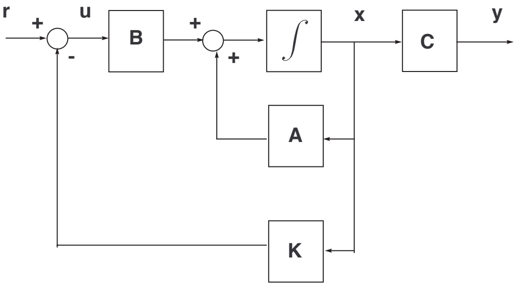

Figura 1: Diagrama de bloques de un sistema realimentado en estado.

Modos observables y controlables

- Supongamos un cierto sistema en tiempo continuo expresado en la *forma canónica de Jordan* con autovalores distintos.

$$e^{At} = \left\{ \begin{array}{llll} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{array} \right)$$

- El componente i-ésimo de la solución de la ecuación de estado x se podía expresar como

$$x_i(t) = e^{\lambda_i (t-t_0)} x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_i (t-\tau)} B_i u(\tau) \mathrm{d}\tau$$

- A este componente de la solución del vector de estado se le denomina **modo** de respuesta del sistema (modo con autovalor λ_i).

Modos observables y controlables

- La respuesta total del sistema tiene la forma

$$\mathbf{y}(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t)$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son los coeficientes de la matriz **C**.

Modos observables y controlables

- En el modo de respuesta x_i del sistema, si el vector fila $B_i = 0$, dicho modo de respuesta no se verá influido por la entrada $\mathbf{u}(t)$ al sistema.
- Además, en la forma canónica diagonal la variable x_i tampoco tiene influencia de las otras variables de estado, por lo que no resulta posible influir sobre el valor de dicha variable de estado ni directamente (vía entrada de control) ni indirectamente (vía alguna otra variable de estado). Es un **modo no controlable**.
- Si algún modo es no controlable, existirán estados del sistema que no son alcanzables y el sistema es no controlable.
- De forma similar, una columna $C_i = 0$ en la matriz $\mathbf{C}$ da como resultado que dicho modo no sea observable en la salida del sistema. Mientras que si C_i es distinto de cero, tendremos un **modo observable**.

Controlabilidad de estado de un sistema

- Para un sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= e^{\mathbf{A}T} \\ \mathbf{H} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{2}$$

siendo T es el periodo con el que se muestrea el sistema.

Definición

Se dice que un sistema de control, de dimensión n, es **completamente controlable en estado** si existe una entrada $\mathbf{u}$ definida entre $[0, n-1]$ tal que es posible hacer pasar al sistema desde un estado inicial arbitrario $\mathbf{x}(0)$ a otro estado final arbitrario $\mathbf{x}(n)$ en un periodo finito de tiempo (n periodos de muestreo).

Controlabilidad de estado de un sistema

Entrada $u(k)$ escalar

- Dado un sistema definido por la ecuación de estado:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{3}$$

donde $\mathbf{G} : n \times n$, $\mathbf{H} : n \times 1$, $\mathbf{x} : n \times 1$, $\mathbf{u} : 1 \times 1$.

- La solución de la ecuación de estado para un sistema lineal de tiempo discreto invariante era

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) \\
&= \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}^{n-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(1) + \ldots + \mathbf{H}\mathbf{u}(n-1)
\end{aligned} \tag{4}$$

que en forma matricial

$$\mathbf{x}(n) - \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \ldots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}(n-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \tag{5}$$

- Dado que $\mathbf{H}$ es una matriz $n \times 1$ y que $\mathbf{G}$ es $n \times n$, la matriz

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (6)$$

  tendrá dimensiones $n \times n$.
- En el sistema de ecuaciones 5 conocemos los estados inicial, $\mathbf{x}(0)$, y final, $\mathbf{x}(n)$, y podemos calcular la matriz $\mathbf{M}_C$.
- Para poder determinar el vector de entradas de control se tiene que verificar que el rango de la matriz $\mathbf{M}_C$ sea n. A la matriz $\mathbf{M}_C$ se le denomina **matriz de controlabilidad**.

Definición

Condición de controlabilidad del estado. La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea completamente controlable en estado es que el rango de la matriz de controlabilidad sea n.

$$rango(\mathbf{M}_C) = n$$

- Dado el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{7}$$

determinar la secuencia de entradas $u(0), u(1)$ que hay que introducir al sistema para que este pase del estado $[0 \quad 0]^T$ en el instante 0 al estado $[2 \quad 0]^T$ en el ciclo 2.

- **Solución:**
De acuerdo con la ecuación 5 tenemos que

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{8}$$

y sustituyendo $x_1(0), x_2(0), x_1(2), x_2(2)$ por los valores deseados del estado inicial y final tendremos que

Controlabilidad de estado de un sistema

Ejemplo (Cont.)

- resulta

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

donde

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

y dado que el $det(\mathbf{M}_c) \neq 0$, el rango de la matriz de controlabilidad es 2 y el sistema es completamente controlable en estado. Resolviendo el sistema de ecuaciones 10 tenemos

$$\begin{cases} 2 = u(1) - u(0) \\ 0 = u(1) - 2u(0) \end{cases} \tag{12}$$

por tanto:

$$u(1) = 2u(0)$$

y la solución es $u(0) = 2, u(1) = 4$.

- Supongamos un segundo sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \tag{13}$$

determinar la secuencia de entradas $(u(0), u(1))$ que hay que introducir al sistema para que éste pase del estado $[0 \quad 0]^T$ en el instante 0 al estado $[2 \quad 0]^T$ en el ciclo 2.

- **Solución:**
De acuerdo con la ecuación 5 tenemos que

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{14}$$

y sustituyendo $x_1(0), x_2(0), x_1(2), x_2(2)$ por los valores deseados del estado inicial y final tendremos que

Controlabilidad de estado

Ejemplo 2 (Cont.)

- resulta

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{16}$$

  es decir $2 = u(1) - u(0)$ y para $u(1) = 0$, se tiene u(0)=-2. Como

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

  y el rango de la $\mathbf{M}_C$ es 1, el sistema **no es completamente controlable en estado**.

- Pero si resolvemos el sistema, obtenemos que la solución del sistema nos daría $2 = u(1) - u(0)$, es decir, si fijamos $u(1) = 0$, entonces $u(0) = -2$.
- El estado es alcanzable desde el punto inicial que se ha considerado.

- Para un sistema con entrada vector definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{18}$$

donde $\mathbf{G} : n \times n$, $\mathbf{H} : n \times r$, $\mathbf{x} : n \times 1$, $\mathbf{u} : r \times 1$.

- La matriz de controlabilidad $\mathbf{M}_C$ será una matriz $n \times nr$, es decir

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \tag{19}$$

y el sistema de ecuaciones esta formado por n ecuaciones y nr incógnitas.

- Para que el sistema tenga solución, el rango de la matriz de controlabilidad debe ser el menor entre n y nr, es decir, n.
- Como el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, tenemos $n(r-1)$ grados de libertad para elegir los posibles valores de las entradas de control que permiten pasar del estado inicial al final.
- Se establece algún tipo de restricción o criterio para elegir de entre todas las posibles las soluciones que nos interesan.

Controlabilidad de la salida

- El hecho de que un sistema sea completamente controlable en estado no garantiza que podamos controlar la salida del sistema, salvo en el caso en el que el sistema tenga una única salida.
- En general, cuando se diseña un sistema de control lo que se busca es controlar la salida del sistema más que controlar el estado del mismo. Por ello, es necesario realizar un análisis similar al anteriormente indicado para la controlabilidad completa del estado, pero en este caso para la salida.

Definición

Se dice que un sistema de control de dimensión n es **completamente controlable en la salida** si existe una entrada $\mathbf{u}$ definida entre $[0, n-1]$ tal que es posible hacer pasar al sistema desde una salida inicial arbitraria $\mathbf{y}(0)$ a otra salida final arbitraria $\mathbf{y}(n)$ en un periodo finito de tiempo (n periodos de muestreo).

Controlabilidad de la salida

Entrada $u(k)$ escalar

- Supongamos que el sistema viene definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (20)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (21)$$

donde $\mathbf{G} : n \times n$, $\mathbf{H} : n \times 1$, $\mathbf{C} : m \times n$, $\mathbf{x} : n \times 1$, $\mathbf{u} : 1 \times 1$, $\mathbf{y} : m \times 1$ y $m \leq n$.

- Recordando que la solución de la ecuación de estado para un sistema lineal de tiempo discreto invariante era de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}u(j) \\ &= \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}u(0) + \mathbf{G}^{n-2}\mathbf{H}u(1) + \ldots + \mathbf{H}u(n-1)\end{aligned} \quad (22)$$

- se tiene que la salida del sistema tendrá la siguiente expresión:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) = \mathbf{C}\mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}u(j) \quad (23)$$

- De aquí que

$$\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{n}\mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j)$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{C}H & \mathbf{C}GH & \dots & \mathbf{C}G^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}(n-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \tag{24}$$

- Dado que $\mathbf{H} : n \times 1$ y que $\mathbf{G} : n \times n$, $\mathbf{C} : m \times n$, la matriz de controlabilidad de la salida

$$\mathbf{M}_{CS} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}H & \mathbf{C}GH & \dots & \mathbf{C}G^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix}$$

tendrá dimensiones $m \times n$.

- En el sistema de ecuaciones 24 conocemos los estados inicial $\mathbf{y}(0)$ y final $\mathbf{y}(n)$, y podemos calcular la matriz $\mathbf{M}_{CS}$. Para poder determinar el vector de entradas de control se tiene que verificar que el rango de la matriz $\mathbf{M}_{CS}$ es m.

Definición (Condición de controlabilidad de la salida)

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea completamente controlable en la salida es que el rango de la matriz de controlabilidad de la salida sea m.

$$rango(\mathbf{M}_{CS}) = m$$

Definición

La controlabilidad completa de estado implica controlabilidad completa de la salida si y sólo si las m filas de la matriz $\mathbf{C}$ son linealmente independientes.

- Dado el sistema

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\
\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

  determinemos si el sistema es completamente controlable en salida.

- **Solución:** Obtenemos la matriz de controlabilidad de la salida

$$
\mathbf{M}_{CS} = \begin{bmatrix} \mathbf{CH} & \mathbf{CGH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}
$$

  cuyo rango es 1. Por lo que el sistema **no** es completamente controlable en la salida, aunque el sistema es controlable en estado ya que

$$
\mathbf{M}_c = [\mathbf{H} \quad \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

  y, por tanto $rg(\mathbf{M}_c) = 2$.

- Esto se podía haber detectado, ya que las filas de la matriz **C** no son linealmente independientes.
- En este caso, los dos menores de M_c son distintos de cero, lo que implica que podemos controlar cualquier estado.
- Sin embargo, en la matriz de controlabilidad de salida M_{cs}, el menor de y_1 es -2 y el de la salida y_2 es cero. Por lo que la salida y_1 será controlable e y_2 será linealmente dependiente de la primera.
- Esto significa que podremos situar libremente una salida (y_1), pero la otra (y_2) estará en función de la primera.

Observabilidad de un sistema

- Un aspecto importante es la posibilidad de estimar u observar el valor que toman las variables de estado que no son medibles directamente.
- Dicha estimación se realiza a partir de la medida de la salida del sistema durante un cierto número mínimo de periodos de muestreo y de los valores de la señal de control que se le introducen al sistema.

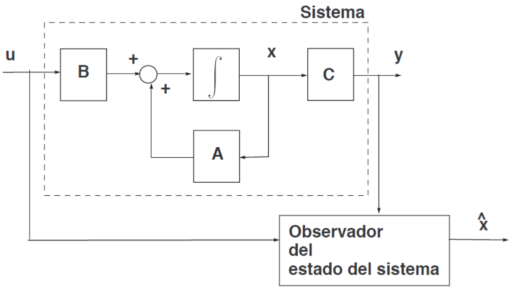

Figura 2: Concepto de observador de estado.

Observabilidad de un sistema

- Dado un sistema definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) && (26) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) && (27) \end{aligned}$$

  donde $\mathbf{G} : n \times n$, $\mathbf{H} : n \times 1$, $\mathbf{C} : m \times n$, $\mathbf{x} : n \times 1$, $\mathbf{u} : 1 \times 1$, $\mathbf{y} : m \times 1$ y $m \leq n$.

- La solución de la ecuación de estado para un sistema lineal de tiempo discreto e invariante era

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) \qquad (28)$$

  y la salida del sistema tenía la siguiente expresión

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) \qquad (29)$$

Observabilidad de un sistema

- En la ecuación 29 se conoce **G**, **H** y **C** y la secuencia de entradas al sistema $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(n-1)$ por lo que el segundo término de la parte derecha de dicha expresión nos es completamente conocido.
- Puesto que este término siempre es conocido, podemos simplificar el problema de determinar la observabilidad de un sistema limitándonos a analizar el sistema *no forzado*, es decir, con entrada de control cero.
- Dicho de otro modo, si podemos determinar para el sistema no forzado cual es el estado inicial de partida del sistema a partir de la observación de las salidas del sistema, entonces podremos determinarlo también para el sistema sujeto a una secuencia de entradas de control.

Observabilidad completa de estado

Definición

Un sistema se dice que es **completamente observable** si todo estado inicial $\mathbf{x}(0)$ puede ser determinado a partir de la observación de la salida $\mathbf{y}(k)$ del sistema en un número finito de intervalos de muestreo.

- Considerando el sistema no forzado, las ecuaciones de éste quedan reducidas a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(n-1) \\ \mathbf{y}(n-1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(n-1) \end{aligned} \tag{30}$$

- y aplicando recursivamente la expresión de la ecuación de estado obtenemos que la salida del sistema será

$$\mathbf{y}(n-1) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{x}(0) \tag{31}$$

Observabilidad completa de estado

- De acuerdo con la definición de observabilidad, dada la secuencia de salidas $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(n-1)$, un sistema será observable si es posible determinar a partir de ellas el estado inicial $\mathbf{x}(0)$. Si expresamos las salidas en función del estado inicial tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(n-1) &= \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{aligned} \tag{32}$$

- y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \tag{33}$$

Observabilidad completa de estado

- A la matriz $\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{CG} & \ldots & \mathbf{CG}^{n-1}\end{bmatrix}^T$ se le denomina **matriz de observabilidad**, $\mathbf{M}_O$. Como $\mathbf{G}$ es una matriz $n \times n$ y $\mathbf{C}$ es $m \times n$, la matriz $\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{CG} & \ldots & \mathbf{CG}^{n-1}\end{bmatrix}^T$ tiene dimensión $mn \times n$. Por lo tanto, para que el sistema de ecuaciones tenga solución, dicha matriz $\mathbf{M}_O$ tiene que tener rango n.

Definición (Condición de observabilidad)

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea observable es que el rango de la matriz de observabilidad sea n.

$$rango(\mathbf{M}_O) = n$$

- Una situación típica en la que un sistema no es completamente observable o controlable se produce en los sistemas en los que existen cancelaciones polo-cero.
- En el caso de un sistema con una entrada y una salida, el sistema será a la vez controlable y observable si no se pueden efectuar cancelaciones polo-cero en la función de transferencia.

- Dado el sistema definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

  determinar la observabilidad del mismo.

- **Solución:**
  Si obtenemos la matriz de observabilidad de estado del sistema tenemos que:

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -0{,}5 & -2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

  cuyo rango es 2, por lo que el sistema será completamente observable.

Invarianza de la controlabilidad y observabilidad

- Un sistema admite múltiples representaciones en el espacio de estados. Una pregunta es, si la controlabilidad y observabilidad se mantienen ante un cambio de base en la representación de estado utilizada. Si hacemos un cambio de base, caracterizado por la matriz de transformación **T**, no singular, en la representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{Hu}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{Cx}(k) \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{Tx}'(k) \end{aligned} \tag{35}$$

tendremos una nueva representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(k+1) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{GTx}'(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Hu}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{CTx}'(k) \end{aligned} \tag{36}$$

donde las nuevas matrices $\mathbf{G}', \mathbf{H}', \mathbf{C}'$ serán

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'(k+1) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT} \\ \mathbf{H}'(k) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} \\ \mathbf{C}'(k) &= \mathbf{CT} \end{aligned} \tag{37}$$

Invarianza de la controlabilidad

- Para esta nueva representación de estado la matriz de controlabilidad será

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_C &= \left[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} \quad \ldots \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\right] \\ &= \left[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{H} \quad \ldots \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}\right] \\ &= \mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{H} \quad \mathbf{G}\mathbf{H} \quad \ldots \quad \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}\right] \\ &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}_C \end{aligned} \tag{38}$$

- y puesto que **T** es una matriz no singular, el rango de la matriz de controlabilidad $\mathbf{M}'_C$ y de la matriz de controlabilidad del sistema original $\mathbf{M}_C$ coinciden.
- De aquí que si el sistema 35 es controlable, el sistema 36 en la nueva base también será controlable.

Invarianza de la observabilidad

- Si hacemos un análisis similar para la observabilidad, se tiene que la matriz de observabilidad del sistema 36 es

$$\begin{aligned} \mathbf{M'}_O &= \begin{bmatrix} \mathbf{CT} \\ \mathbf{CTT}^{-1}\mathbf{GT} \\ \vdots \\ \mathbf{CTT}^{-1}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CT} \\ \mathbf{CGT} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{T} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{T} = \mathbf{M}_O\mathbf{T} \end{aligned} \tag{39}$$

- Como la matriz de transformación **T** es no singular, y de forma similar al caso de la controlabilidad, los rangos de las matrices de observabilidad $\mathbf{M'}_O$ y $\mathbf{M}_O$ son iguales.
- Por tanto, aunque el sistema cambie de base, si el sistema era observable, seguirá siendo observable.

Principio de dualidad (Kalman)

- Sea un sistema $\mathbf{S}_1$ lineal e invariante en el tiempo definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \tag{40}$$

donde las matrices tienen dimensión: $\mathbf{x} : n \times 1$, $\mathbf{u} : r \times 1$, $\mathbf{y} : m \times 1$, $\mathbf{G} : n \times n$, $\mathbf{H} : n \times r$, $\mathbf{C} : m \times n$ y un sistema $\mathbf{S}_2$, denominado sistema **dual** del $\mathbf{S}_1$, definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(k+1) &= \mathbf{G}^T\mathbf{x}'(k) + \mathbf{C}^T\mathbf{u}'(k) \\ \mathbf{y}'(k) &= \mathbf{H}^T\mathbf{x}'(k) \end{aligned} \tag{41}$$

donde: $\mathbf{x}' : n \times 1, \mathbf{u}' : m \times 1, \mathbf{y}' : r \times 1$.

Principio de dualidad (Kalman)

El sistema $\mathbf{S}_1$ es completamente controlable en estado si y sólo si el sistema $\mathbf{S}_2$ es completamente observable, y $\mathbf{S}_1$ es completamente observable si y sólo si el sistema $\mathbf{S}_2$ es completamente controlable en estado.

Principio de dualidad (Kalman)

- Si observamos las matrices de controlabilidad y observabilidad del sistema $\mathbf{S}_1$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_C &= \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_O &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

- La matriz de controlabilidad del sistema dual $\mathbf{S}_2$ es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M'}_C &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{G}^T\mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{G}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_O
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Principio de dualidad (Kalman)

- Y la de observabilidad del sistema dual $\mathbf{S}_2$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{M}'_O &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}^T\mathbf{G}^T \\ \vdots \\ \mathbf{H}^T(\mathbf{G}^{n-1})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_C \end{aligned} \tag{44}$$

  y como se puede observar $\mathbf{M}'_O = \mathbf{M}_C$ y $\mathbf{M}'_C = \mathbf{M}_O$, tal y como indica el principio de dualidad.

- Este principio de dualidad se ha utilizado cuando se obtuvieron las representaciones canónicas de un sistema a partir de la función de transferencia, donde la forma canónica controlable y la observable son sistemas duales.

Control por realimentación de estado

- Queremos controlar un sistema, en el que todas las variables de estado están disponibles (medibles o accesibles) para ser utilizadas en la realimentación del sistema.

Teorema

Si un sistema es completamente controlable en estado, entonces los polos en bucle cerrado del sistema pueden ser libremente situados en las posiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ que se deseen mediante una realimentación de estado con una matriz K de ganancias adecuada.

Control por realimentación de estado

- Este esquema de control busca que la ecuación característica del sistema realimentado tome la forma

$$(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n) = 0 \tag{45}$$

- La elección de las posiciones deseadas de los polos se hace de forma que se cumplan unas ciertas especificaciones de diseño.

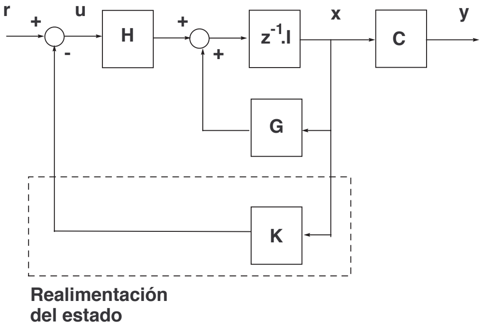

Figura 3: Realimentación del estado.

- Sea el sistema de la figura anterior, con ecuación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \tag{46}$$

donde $\mathbf{G} : n \times n$, $\mathbf{H} : n \times 1$, $\mathbf{C} : 1 \times n$, $\mathbf{x} : n \times 1$, $u : 1 \times 1$ e $y : 1 \times 1$.

- La señal de control al sistema viene dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{K}\mathbf{x}(k) \tag{47}$$

- De las ecuaciones 46 y 47 tenemos que (con $\mathbf{K} : 1 \times n$)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}[-\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + r(k)] \tag{48}$$

$$= [\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}r(k) \tag{49}$$

Sistemas con entrada y salida escalar

- Tomando transformada z, se tiene

$$z\mathbf{X}(z) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})X(z) + \mathbf{H}R(z) \tag{50}$$

por tanto,

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK})X(z) = \mathbf{H}R(z) \tag{51}$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK})^{-1}\mathbf{H}R(z) \tag{52}$$

la salida tendrá la expresión

$$Y(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}]^{-1}\mathbf{H}R(z) \tag{53}$$

de donde se obtiene

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}]^{-1}\mathbf{H} \tag{54}$$

En 54 se puede observar que el denominador de la función de transferencia es $|z\mathbf{I} - (\mathbf{G} - \mathbf{HK})|$.

Sistemas con entrada y salida escalar

- Si deseamos un cierto comportamiento dinámico del sistema, nos basta con ajustar las posiciones de los polos del sistema en cadena cerrada.
- Para ello, se determinan las posiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ deseadas para los polos (la ecuación característica deseada) y de aquí

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = (z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n) \tag{55}$$

- De la expresión 55 se obtienen los valores de los coeficientes de la matriz $\mathbf{K}$.
- La condición necesaria y suficiente para poder resolver este sistema es que el rango de la matriz de controlabilidad de estado sea n, es decir, que el sistema sea totalmente controlable.
- Si el sistema es totalmente controlable, la matriz $(z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK})$ es no singular.

- Dado un sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{56}$$

completamente controlable en estado, si realimentamos el estado de forma que $\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, para que los polos en bucle cerrado del sistema se sitúen en las posiciones $z = p_1, z = p_2, \ldots, z = p_n$, basta con igualar las expresiones características, es decir:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = (z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n) = 0 \tag{57}$$

- En la izquierda tenemos un polinomio en z que es función de los coeficientes de la matriz $\mathbf{K}$ de realimentación de estado.
- Igualando dichos coeficientes a los de la ecuación característica deseada, obtenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y resolviéndolo obtenemos los coeficientes de la matriz de realimentación.

- Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{58}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{59}$$

  Se desea determinar los valores de las ganancias de la matriz **K** de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en $p_{1,2} = -0{,}5 \pm j0{,}5$.

- **Solución:**
  Comprobemos en primer lugar que el sistema sea completamente controlable en estado. Para ello, obtendremos la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix} \tag{60}$$

  que tiene rango 2, por lo que el sistema es completamente controlable en estado.

- Dado que el sistema es controlable, es factible encontrar una realimentación de estado que cumpla nuestras exigencias. De acuerdo con la ecuación 55 tenemos que

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = (z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n) = 0 \tag{61}$$

que para nuestro caso concreto da

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^2 - z + 0{,}5 = 0 \tag{62}$$

- Sustituyendo en el primer término las matrices por sus valores y operando

$$z^2 + z(0{,}5 + k_2) + (1 + k_1) = z^2 - z + 0{,}5 = 0 \tag{63}$$

- Igualando los coeficientes de ambos polinomios obtenemos

$$\begin{aligned} k_1 &= -0{,}5 \\ k_2 &= -1{,}5 \end{aligned}$$

- La matriz de realimentación de estado será $\mathbf{K} = [-0{,}5 \; -1{,}5]$.

- La respuesta del sistema en cadena abierta y del sistema con la realimentación de estado diseñada se muestra en la figura 4.

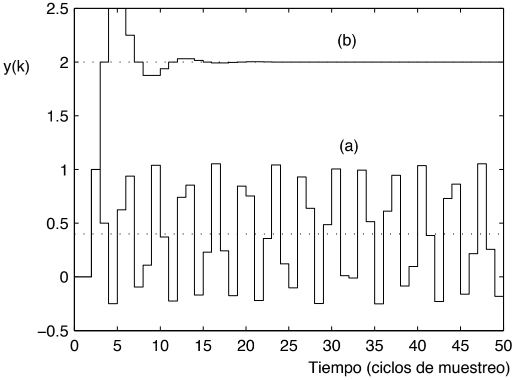

Figura 4: Respuesta del sistema del ejemplo: (a) sin realimentación y (b) sistema realimentado

Determinación de las posiciones de los polos por transformación

- Si el sistema no está en la forma canónica controlable, el método de comparación de coeficientes puede dar lugar a cálculos complejos.
- Existe posibilidad transformar el sistema a la forma canónica controlable, diseñar en esta el regulador y después convertir el regulador a la representación que teníamos inicialmente.
- Supongamos un sistema con la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (64) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (65) \end{aligned}$$

cuya matriz de controlabilidad viene dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (66)$$

y supongamos que aplicamos una transformación $\mathbf{T}$ que transforma al sistema a la forma canónica controlable

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\mathbf{x}'(k) \quad (67)$$

Determinación de las posiciones de los polos por transformación

- con lo que el nuevo sistema quedaría en la forma

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) \quad (68)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) \quad (69)$$

- Esta nueva representación tiene la siguiente matriz de controlabilidad, tal y como se vio en 38:

$$\mathbf{M}_{C'} = \mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}\end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}_C \quad (70)$$

  y de aquí se obtiene la matriz de transformación $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}_C\mathbf{M}_{C'}^{-1} \quad (71)$$

- Una vez que el sistema está en la forma canónica controlable y verifica la condición de controlabilidad, se diseña el regulador por realimentación de estado. En esta representación tendremos que

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}' + \mathbf{H}'\mathbf{K}'| = (z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n) = 0 \quad (72)$$

Determinación de las posiciones de los polos por transformación

- Igualando los coeficientes se determina la matriz de ganancias del regulador $\mathbf{K}'$.
- El sistema realimentado en la forma canónica controlable tiene las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(k+1) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) && (73)\\ u(k) &= -\mathbf{K}'\mathbf{x}'(k) + r(k) && (74)\\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) && (75) \end{aligned}$$

y de aquí

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(k+1) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{K}'\mathbf{x}'(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}r(k) && (76)\\ &= (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{K}')\mathbf{x}'(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}r(k) && (77)\\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) && (78) \end{aligned}$$

- Ahora deshacemos la transformación, volviendo a la representación inicial, para lo cual aplicamos $\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$.

Determinación de las posiciones de los polos por transformación

- Tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{K}'\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}r(k) && (79)\\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}'\mathbf{T}^{-1})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}r(k) && (80)\\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) && (81) \end{aligned}$$

- Comparando con la ecuación característica del sistema realimentado en la representación original

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = 0 \tag{82}$$

obtenemos que

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}'\mathbf{T}^{-1} \tag{83}$$

- Si el **sistema es nocontrolable**, se puede transformar a la forma canónica controlable y calcular la matriz de ganancias $\mathbf{K}'$ para controlar el sistema, pero $\mathbf{T}$ es singular, por lo que **no es posible obtener la inversa de la transformación y tampoco K**.

Determinación de las posiciones de los polos por transformación

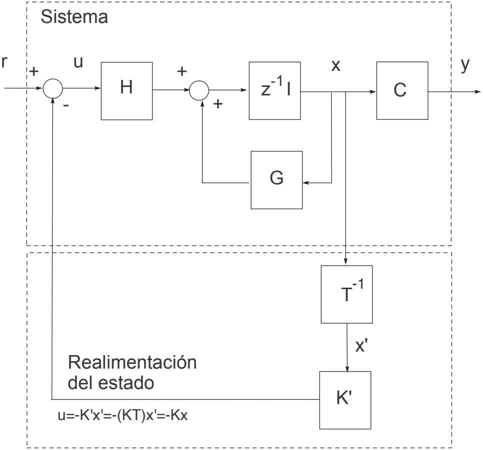

Figura 5: Transformación de un sistema a otra representación de estado para controlarlo.

Determinación de las posiciones de los polos por transformación

Ejemplo

- Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad (84)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \qquad (85)$$

  y se desea determinar los valores de las ganancias de la matriz **K** de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en $p_{1,2} = z - 0{,}5 \pm j0{,}5$.

- **Solución:** Comprobemos que el sistema sea completamente controlable en estado. Para ello obtendremos la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (86)$$

  que tiene rango 1, por lo que el sistema no es completamente controlable en estado.

El sistema es **no controlable** en estado. Si se quiere controlar, es necesario pasar a una representación de estado donde sea controlable. Para ello obtenemos la función de transferencia del sistema

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1}\mathbf{H} = \frac{z + 0{,}5}{z^2 + 1{,}5z + 0{,}5}$$

y pasando directamente de la función de transferencia a la forma canónica controlable

$$\begin{bmatrix} x_1'(k+1) \\ x_2'(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & -1{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{87}$$

$$y(k) = [0{,}5 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1'(k) \\ x_2'(k) \end{bmatrix} \tag{88}$$

Determinación de las posiciones de los polos por transformación

Ejemplo (Cont.)

en esta nueva representación la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{M}'_C = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{G}'\mathbf{H}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1{,}5 \end{bmatrix} \tag{89}$$

tiene rango 2, por lo que es controlable.

En la forma canónica controlable se calculan las ganancias de la matriz de realimentación $\mathbf{K}'$ que sitúan los polos del sistema en cadena cerrada en las posiciones que se desean.

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = (z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n) = 0 \tag{90}$$

Para nuestro caso se obtiene

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}' + \mathbf{H}'\mathbf{K}'| = z^2 - z + 0{,}5 = 0 \tag{91}$$

y sustituyendo en el primer término las matrices por sus valores y operando

$$z^2 + z(1{,}5 + k_2') + (0{,}5 + k_1') = z^2 - z + 0{,}5 = 0 \tag{92}$$

si igualamos los coeficientes de ambos polinomios obtenemos

$$\begin{aligned} k_1' &= 0 \\ k_2' &= -2{,}5 \end{aligned}$$

y la matriz de realimentación de estado será $\mathbf{K}' = [0 \; -2{,}5]$.
En este caso no es posible aplicar la inversa de la transformación $\mathbf{T}$ para obtener la matriz de ganancias en la representación de estado inicial.

Comprobémoslo. Para ello obtenemos la matriz de transformación que nos permite pasar de una representación a otra

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}_C {\mathbf{M}'_C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \tag{93}$$

y como el rango de **T** es 1, la matriz no es invertible y el sistema no es controlable en esa forma canónica.

Control por realimentación de estado

Ajuste de la ganancia

- Supongamos el sistema mostrado en la figura en el que se ha incluido una ganancia k_0 con el fin de ajustar la ganancia estática del sistema de forma que tengamos la posibilidad de ajustar el error que comete el sistema en régimen permanente.

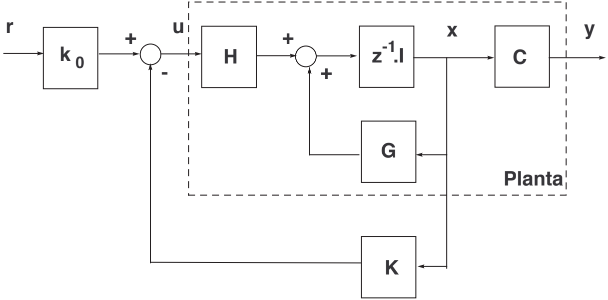

Figura 6: Realimentación de estado con ajuste de ganancia

Control por realimentación de estado

Ajuste de la ganancia

- Las ecuaciones del sistema en este caso son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k) \end{aligned} \tag{94}$$

  donde $\mathbf{G} : n \times n$, $\mathbf{H} : n \times 1$, $\mathbf{C} : 1 \times n$, $\mathbf{x} : n \times 1$, $u : 1 \times 1$ e $y : 1 \times 1$.

- La señal de control $u(k)$ que se introduce al sistema viene dada por

$$u(k) = k_0 r(k) - \mathbf{Kx}(k) \tag{95}$$

- De las ecuaciones 94 y 95 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{H}[-\mathbf{Kx}(k) + k_0 r(k)] \\ &= [\mathbf{G} - \mathbf{H}K]\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}k_0 r(k) \end{aligned} \tag{96}$$

- La función de transferencia del sistema tendrá la forma

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}]^{-1}\mathbf{H}k_0 \tag{97}$$

- En la ecuación 97 se ve que el denominador de la función de transferencia es el determinante de la matriz $[z\mathbf{I} - (\mathbf{G} - \mathbf{HK})]$ y en el numerador aparece la ganancia k_0 que se ha introducido en la cadena principal.
- Si deseamos cierto comportamiento:
  - Para ajustar la dinámica del sistema, se ajustan en primer lugar las posiciones de los polos del sistema en cadena cerrada.
  - Para ajustar el error en régimen permanente, una vez fijados los polos, se ajusta el valor de k_0.
- Si suponemos que la entrada al sistema es $R(z)$, la respuesta en régimen permanente tiene la siguiente expresión

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})R(z)F(z) \qquad (98)$$

- En la ecuación 98, si se conoce el valor deseado de la salida en régimen permanente para la entrada $R(z)$ introducida, es posible determinar el valor de la ganancia k_0 de la parte derecha de la expresión, con lo que tendríamos ajustado también el régimen permanente.

- Supongamos el mismo sistema del ejemplo anterior. Se han determinado los valores de la ganancia de realimentación de estado parar situar los polos en unas posiciones determinadas.

  Buscamos ahora conseguir que el error en régimen permanente ante entrada escalón sea cero.

- **Solución:** Veamos primero si el sistema cumple la especificación respecto al error en régimen permanente. La función de transferencia del sistema en bucle cerrado es

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}]^{-1}\mathbf{H} \tag{99}$$

  Desarrollando esta expresión tenemos

$$F(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0{,}5 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2 - z + 0{,}5} \tag{100}$$

Ajuste de la ganancia

Ejemplo (Cont.)

Si al sistema se le introduce en la entrada un escalón unitario, el valor de la salida en régimen permanente será

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} y(k) &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})R(z)F(z) \\ &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{z}{z-1}\frac{1}{z^2-z+0{,}5} \\ &= 2 \end{aligned} \tag{101}$$

Para una entrada unitaria la salida en régimen permanente del sistema nos da el valor 2.

Si queremos que la salida del sistema en régimen permanente tenga valor 1, introducimos una ganancia k_0 en el sistema, con lo que la función de transferencia en bucle cerrado quedará como

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}]^{-1}\mathbf{H}k_0 \tag{102}$$

La respuesta en régimen permanente será

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} y(k) &= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})R(z)F(z) \\ &= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{z}{z-1}\frac{k_0}{z^2 - z + 0{,}5} \\ &= \frac{k_0}{0{,}5} \end{aligned} \qquad (103)$$

Por tanto, para que el valor de la respuesta del sistema en régimen permanente sea 1, se requiere que $k_0 = 0{,}5$.

Modificación del tipo del sistema

- No siempre se puede ajustar satisfactoriamente la respuesta dinámica y la respuesta en régimen permanente del sistema con estas dos técnicas que se han comentado.
- Esto pasa especialmente en sistemas de orden bajo, donde los grados de libertad para elegir las posiciones de los polos en cadena cerrada del sistema son limitados.
- Si se quiere una respuesta dinámica de segundo orden y un error nulo en régimen permanente, el sistema deberá tener orden tres para que podamos ajustarlo. Si el orden es menor, se puede ajustar la dinámica o el régimen permanente, pero no los dos a la vez.
- En el caso de que el orden del sistema no nos permita satisfacer las dos condiciones de diseño simultáneamente, es posible elevar el tipo del sistema añadiendo un integrador en la cadena principal del sistema (éste aumenta el orden y el tipo del sistema).

Modificación del tipo del sistema

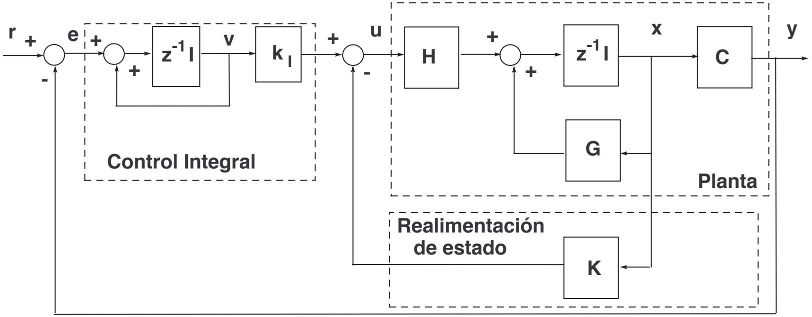

Figura 7: Realimentación de estado con integrador adicional.

Modificación del tipo del sistema

- El sistema de la figura 7 tiene las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}k_i v(k) \\
v(k+1) &= v(k) + e(k) \\
e(k) &= r(k) - y(k) \\
y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)
\end{aligned} \tag{104}
$$

- En esta expresión podemos reescribir $v(k+1)$ como

$$
v(k+1) = v(k) + r(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{105}
$$

- Si consideramos ahora un nuevo vector de estado aumentado con $v(k)$, tendremos la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}k_i \\ -\mathbf{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{106}
$$

Modificación del tipo del sistema

- En la figura se puede ver que añadir una variable de estado adicional que acumula el error cometido entre la entrada y la salida del sistema es básicamente una relimentación de estado.

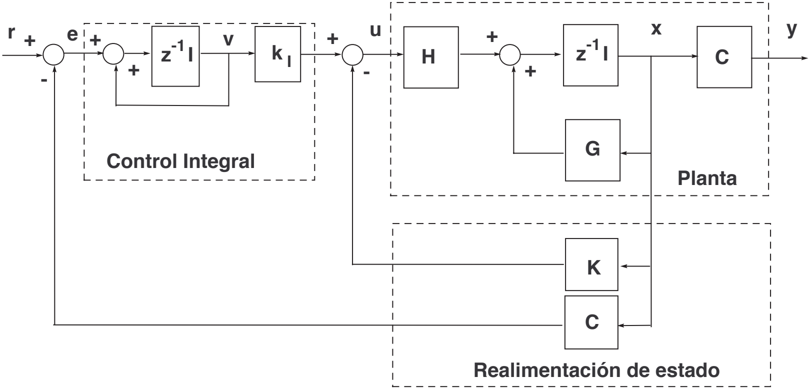

Figura 8: Realimentación de estado con integrador adicional (2).

Ejemplo

- Supongamos el mismo sistema del ejemplo anterior para el que se han determinado los valores de la ganancia de realimentación de estado, así como la ganancia necesaria para que el error en régimen permanente ante entrada escalón fuese cero.

  Tratemos de conseguir que el error en régimen permanente ante entrada rampa sea también cero.

- **Solución:** Veamos el error que se comete en régimen permanente ante una entrada de tipo rampa para el sistema:

$$e(k) = r(k) - y(k) \tag{107}$$

y tomando transformadas en z, tendremos que

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) - F(z)R(z) = (1 - F(z))R(z) \tag{108}$$

Ejemplo (Cont.)

Para ver el error en régimen permanente, hacemos el límite de esta expresión del error para $t \to \infty$ y se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to \infty} e(k) &= \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) R(z)(1 - F(z)) \\
&= \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{T z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \left(1 - \frac{k_0}{z^2 - z + 0{,}5}\right) \\
&= \frac{T(0{,}5 - k_0)}{0}
\end{aligned} \tag{109}$$

Salvo para el caso $k_0 = 0{,}5$, donde el error queda indeterminado, en el resto de los casos el error en régimen permanente tiende hacia infinito (en la práctica las posibilidades de ajustar k_0 al valor 0.5 son remotas, por lo que las pequeñas desviaciones harán que el error tienda a infinito siempre).

Ejemplo (Cont.)

Si se introduce un integrador, manteniendo los valores calculados previamente para la matriz de ganancia **K** de la realimentación de estado, las matrices del sistema con control integral son

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{H}k_i \\ -\mathbf{C} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0{,}5 & k_i \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (Cont.)

La función de transferencia del sistema quedará de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
F'(z) &= \mathbf{C}'[z\mathbf{I} - \mathbf{G}']^{-1}\mathbf{H}' \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 1 & z+0{,}5 & -k_i \\ 1 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{k_i}{(z-1)(z^2+0{,}5z-1)+k_i}
\end{aligned}
$$

Haciendo el límite para $t \to \infty$ en la expresión del error en régimen permanente, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} e(k) &= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})R(z)(1 - F'(z)) \\
&= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}\left(1 - \frac{k_i}{(z-1)(z^2 - z + 0{,}5) + k_i}\right) \\
&= \frac{0{,}5T}{k_i}
\end{aligned} \tag{110}$$

El error no se anula completamente pero se puede hacer muy pequeño muestreando el sistema con un periodo T pequeño y haciendo grande el valor de k_i.

Sistemas con entrada vector

- Hemos considerado el problema de diseñar una realimentación de estado para el caso de sistemas con entrada de control de tipo escalar.
- En el caso de que la entrada de control al sistema sea un vector, tenemos mucha más libertad para elegir las señales de control para controlar el sistema.
- La matriz de controlabilidad tenía dimensiones $n \times n$ para sistemas con entrada escalar, pero para el caso de entrada vectorial, las dimensiones eran $n \times nr$ (suponiendo que el estado tiene dimensiones $n \times 1$ y la entrada de control $r \times 1$).

Ejemplo

- Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \tag{111}$$

  y se desea determinar los valores de las ganancias de la matriz **K** (de dimensión 2×2) de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en $p_1 = 0{,}5 \pm j0{,}5$.

- **Solución:** Comprobamos la matriz de controlabilidad de estado

$$\mathbf{M}_C = [\mathbf{H}|\mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}25 & -0{,}5 & -0{,}125 \end{bmatrix} \tag{112}$$

  que tiene rango 2, por lo que el sistema es completamente controlable en estado.

Ejemplo (Cont.)

Se desea que los polos del sistema en cadena cerrada estén en $p_1 = 0{,}5 - j0{,}5$ y $p_1 = 0{,}5 + j0{,}5$, luego

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^2 - z + 0{,}5 = 0 \tag{113}$$

Sustituyendo las matrices por sus valores

$$z^2 + z(0{,}5 + k_{12} - 0{,}25k_{22}) + 0{,}5 + k_{11} + 0{,}25k_{21} = z^2 - z + 0{,}5 = 0 \tag{114}$$

e igualando los coeficientes de ambos polinomios, obtenemos

$$\begin{aligned} k_{12} + 0{,}25k_{22} &= -1{,}5 \\ k_{11} + 0{,}25k_{21} &= 0 \end{aligned} \tag{115}$$

Tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas, luego tenemos dos grados de libertad en los coeficientes de la matriz de ganancias.

- Si tomamos $k_{12} = k_{21} = 1$, tendremos que $k_{22} = -10$ y $k_{11} = -0{,}25$, obteniéndose que

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0{,}25 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$