Ingeniería de Control II

Tema 10:
Observadores de Estado

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido

2025

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Ejercicio 1 (1/2)

Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador de estado para este sistema de tal forma que la dinámica del error sea lo más rápida posible (observador en el origen).

Solución:

Primero se comprueba que el sistema es totalmente observable:

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0{,}8 & 2 \end{bmatrix}$$

El rango es 2 por lo que el sistema es completamente observable.
Para que la dinámica del observador sea lo más rápida posible tenemos que colocar los polos en el origen (respuesta de tiempo mínimo o dead-beat):

$$|zI - G + K_eC| = z^2$$

$$\left| \begin{bmatrix} z+0{,}8 & -1 \\ 0 & z-0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = z^2$$

$$\left| \begin{bmatrix} z+0{,}8+K_{e1} & -1+2K_{e1} \\ K_{e2} & z-0{,}5+2K_{e2} \end{bmatrix} \right| = z^2$$

$$(z+0{,}8+K_{e1})(z-0{,}5+2K_{e2}) - K_{e2}(-1+2K_{e1}) = z^2$$

Ejercicio 1 (2/2)

$$z^2 + z\left(+0{,}3 + K_{e1} + 2K_{e2}\right) - 0{,}4 - 0{,}5K_{e1} + 2{,}6K_{e2} = z^2$$

$$\left.\begin{array}{r} +0{,}3 + K_{e1} + 2K_{e2} = 0 \\ -0{,}4 - 0{,}5K_{e1} + 2{,}6K_{e2} = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y llegamos al observador de estado buscado:

$$K_e = \begin{bmatrix} -0{,}4389 \\ 0{,}0694 \end{bmatrix}$$

Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1{,}2 \\ 1 & 0 & -0{,}8 \\ 0 & 1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ -0{,}2 \\ 1{,}1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador de estado para este sistema de tal forma que los polos del observador sean uno doble en el origen y otro en z=-0.1.

Solución:

Primero se comprueba que el sistema es totalmente observable:

$$M_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}3 \\ 1 & -0{,}3 & -0{,}7 \end{bmatrix}$$

El rango es 3 por lo que el sistema es completamente observable.
Para que la dinámica del observador contenga los polos en las posiciones deseadas se debe cumplir la siguiente expresión:

$$|zI - G + K_e C| = z^2(z+0{,}1) = z^3 + 0{,}1z^2$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1{,}2 \\ 1 & 0 & -0{,}8 \\ 0 & 1 & 0{,}3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \\ K_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = z^3 + 0{,}1z^2$$

Ejercicio 2 (2/2)

$$z^3 + (K_{e3} - 0{,}3)z^2 + (K_{e2} + 0{,}8)\, z + K_{e1} - 1{,}2 = z^3 + 0{,}1z^2$$

$$\left.\begin{array}{r} K_{e3} - 0{,}3 = 0{,}1 \\ K_{e2} + 0{,}8 = 0 \\ K_{e1} - 1{,}2 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y llegamos al observador de estado buscado:

$$K_e = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -0{,}8 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -0{,}1 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador de estado para este sistema de tal forma que la dinámica del error sea lo más rápida posible (observador en el origen). Pasar primero el sistema a la forma canónica observable.

Solución:

Primero se comprueba que el sistema es totalmente observable:

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}3 & 3{,}4 \end{bmatrix}$$

El rango es 2 por lo que el sistema es completamente observable.
Para pasarlo a la forma canónica observable hay que calcular la función de transferencia a partir de la siguiente expresión:

$$F(z) = C(zI - G)^{-1} H = \frac{2z}{z^2 - 1{,}7z + 0{,}7}$$

Escribimos las ecuaciones del sistema transformado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}7 \\ 1 & 1{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3 (2/2)

Ahora diseñamos el observador para el sistema transformado. Para que la dinámica del observador sea lo más rápida posible tenemos que colocar los polos en el origen (respuesta de tiempo mínimo o dead-beat):

$$\left| zI - G' + K_e' C' \right| = z^2$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0{,}7 \\ -1 & z - 1{,}7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{e1}' \\ K_{e2}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = z^2$$

$$z^2 + z\left(K_{e2}' - 1{,}7\right) + K_{e1}' + 0{,}7 = z^2$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y llegamos al observador de estado buscado:

$$K_e' = \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}7 \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculamos la matriz de transformación para volver al sistema original:

$$T = M_O^{-1} M_O' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}3 & 3{,}4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1{,}7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}7143 & 0 \\ 0{,}3571 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$K_e = T * K_e' = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}4 & 1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador de estado para este sistema de tal forma que la dinámica del error sea lo más rápida posible (observador en el origen). Pasar primero el sistema a la forma canónica observable.

Solución:

Primero se comprueba que el sistema es totalmente observable:

$$M_O = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}2 \\ -0{,}08 & 1{,}52 \end{bmatrix}$$

El rango es 2 por lo que el sistema es completamente observable.
Se puede deducir que el sistema está en la forma canónica controlable. Para pasarlo a la forma canónica observable hay que calcular la función de transferencia a partir de la siguiente expresión:

$$F(z) = C(zI - G)^{-1}H = \frac{0{,}2z + 1{,}3}{z^2 - 1{,}1z + 0{,}4}$$

Escribimos las ecuaciones del sistema transformado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}4 \\ 1 & 1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} u(k)$$
$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Ahora diseñamos el observador para el sistema transformado. Para que la dinámica del observador sea lo más rápida posible tenemos que colocar los polos en el origen (respuesta de tiempo mínimo o dead-beat):

$$\left| zI - G' + K_e' C' \right| = z^2$$
$$\left| \begin{bmatrix} z & 0{,}4 \\ -1 & z - 1{,}1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K'_{e1} \\ K'_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = z^2$$
$$z^2 + z\left(K'_{e2} - 1{,}1\right) + K'_{e1} + 0{,}4 = z^2$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y llegamos al observador de estado buscado:

$$K_e' = \begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 1{,}1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculamos la matriz de transformación para volver al sistema original:

$$T = M_O'^{-1} M_O = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}2 \\ -0{,}08 & 1{,}52 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1004 & 0{,}6526 \\ 0{,}6526 & 0{,}758 \end{bmatrix}$$

$$K_e = T * K_e' = \begin{bmatrix} 0{,}758 \\ 0{,}5728 \end{bmatrix}$$

Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y_1(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador reducido de estado para este sistema de tal forma que la dinámica del error sea lo más rápida posible (observador en el origen). Suponer para ello q sólo la variables 1 es observable.

Solución:

Separamos primero entre variables medibles y no medibles:

$$G_{mm} = 0{,}8 \quad G_{mn} = -0{,}5 \quad G_{nn} = 0{,}5 \quad G_{nm} = 1$$

Calculamos la matriz de observabilidad:

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

El sistema es completamente observable. Para diseñar el observador de orden reducido aplicamos la siguiente expresión:

$$|zI - (G_{nn} - K_e G_{mn})| = |zI - (0{,}5 + K_e 0{,}5)| = z$$

$$z - (0{,}5 + K_e 0{,}5) = z$$

Ejercicio 5 (2/2)

Tendrá que cumplirse la siguiente condición:

$$0{,}5 + K_e 0{,}5 = 0$$

Una posible solución es:

$$K_e = -1$$

Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador reducido de estado para este sistema de tal forma que la dinámica del error sea lo más rápida posible (observador en el origen). Suponer para ello q sólo las variables 1 y 2 son observables.

Solución:

Separamos primero entre variables medibles y no medibles:

$$G_{mm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \quad G_{mn} = \begin{bmatrix} -0{,}2 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} \quad G_{nn} = 1 \quad G_{nm} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz de observabilidad:

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 1 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}15 \end{bmatrix}$$

El sistema es completamente observable. Para diseñar el observador de orden reducido aplicamos la siguiente expresión:

Ejercicio 6 (2/2)

$$|zI - (G_{nn} - K_e G_{mn})| = \left| zI - \left(1 - \begin{bmatrix} k_{e1} & k_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}\right) \right| = z$$

$$z - (1 + 0,2k_{e1} - 0,1k_{e2}) = z$$

Tendrá que cumplirse la siguiente condición:

$$1 + 0,2k_{e1} - 0,1k_{e2} = 0$$

Una posible solución es:

$$K_e = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix}$$