uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
OpenCourseWare

Ingeniería de Control II

Tema 10:
Observadores de estado

D. Copaci, C. Monje, M. Malfaz, J. Muñoz,
L. Moreno, S. Garrido,

2025

Contenido

Observadores de estado

- Con frecuencia las variables de estado de un sistema o una parte de ellas no son medibles (o accesibles) y únicamente la variable de salida del sistema es medible. En estos casos es necesario estimar aquellas variables de estado que no son medibles directamente mediante observadores de estado.

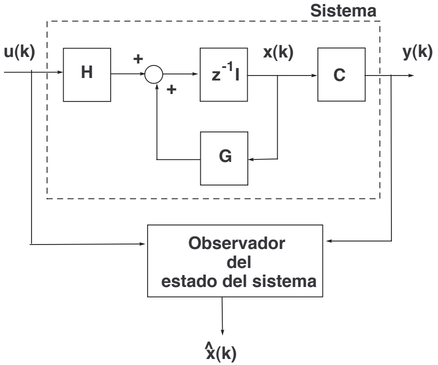

Figura 1: Sistema con observador del estado.

- En el caso de que ninguna de las variables de estado sea medible es necesario que el observador de estado las estime todas. A este tipo de observador se le denomina *observador de orden completo*.
- Una primera idea podría consistir en incluir en el observador un modelo matemático del sistema e introducirle las entradas de control que se le van suministrando al sistema real.

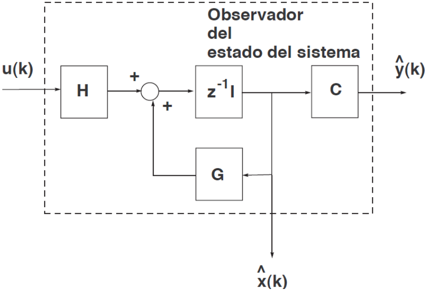

Figura 2: Observador de orden completo del estado.

- Este primer esquema tiene tres limitaciones básicas:
  1. Es necesario conocer el **estado inicial** en el que está el sistema, ya que de otro modo evolucionará de forma distinta al no partir del mismo estado el sistema y el modelo.
  2. Las matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{C}$ del sistema físico real **no se conocen con exactitud**, sino que suelen ser estimaciones de las mismas. El observador tendrá desviaciones que se van acumulando en el tiempo, y pasado un cierto periodo de tiempo, el estado estimado no se corresponde con el estado verdadero del sistema.
  3. Aunque las matrices de sistema que incluimos en el observador fuesen las verdaderas, el efecto de las **perturbaciones** hará que el estado que estima el observador y el real no coincidan al cabo de un cierto tiempo.

- Es necesario modificar el estado estimado por el observador cuando la salida estimada no coincida con la del sistema real, para lo que se introduce una realimentación del error de estimación en el observador.

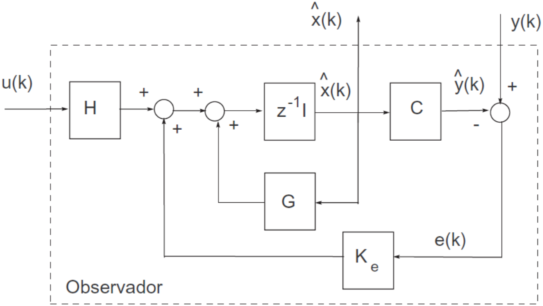

Figura 3: Observador de estado.

Observador de orden completo

- Para que sea posible diseñar un observador, un requisito previo imprescindible es que se pueda estimar matemáticamente el estado en un cierto instante de tiempo. Esto nos lo indica la observabilidad del sistema.

Definición

La condición necesaria y suficiente para poder observar las variables de estado es que se verifique la condición de observabilidad del sistema.

Función de transferencia del observador

- El observador de la figura tiene la siguiente dinámica

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{e}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{e}(k) &= \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

Tomando transformadas z en las expresiones anteriores tenemos que

$$z\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{G}\hat{\mathbf{X}}(z) + \mathbf{K}_e\mathbf{E}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}(z) \quad (3)$$

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{Y}(z) - \hat{\mathbf{Y}}(z) \quad (4)$$

y de aquí

$$z\hat{\mathbf{X}}(z) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\hat{\mathbf{X}}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z) + \mathbf{K}_e\mathbf{Y}(z) \quad (5)$$

o bien

$$\hat{\mathbf{X}}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z) + [z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{Y}(z) \quad (6)$$

Observador de orden completo

- El observador tiene como función de transferencia la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{X}}(z) = \left[[z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{H} \quad [z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{K}_e \right] \begin{bmatrix} \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{Y}(z) \end{bmatrix} \tag{7}$$

  y la ecuación característica del observador viene dada por la ecuación

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0 \tag{8}$$

- Es necesario diseñar la ganancia de realimentación en el observador $\mathbf{K}_e$ de forma que la dinámica del mismo sea adecuada para el sistema que se observa. **El observador debe tener una dinámica más rápida que la del sistema.**

Sistema con realimentación y observador

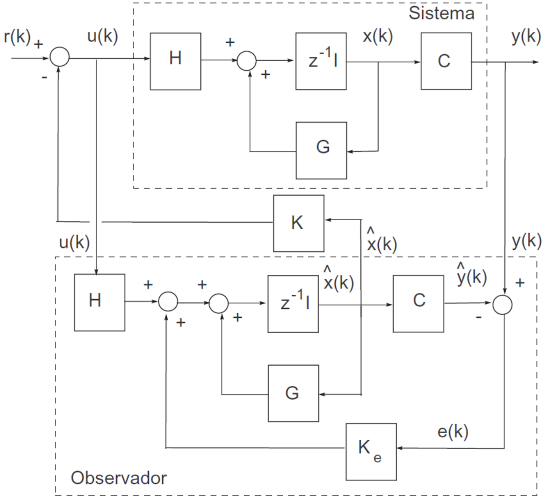

Figura 4: Sistema con observador completo y realimentación del estado.

Error cometido por el observador

- Se ha visto la dinámica del observador, pero interesa más el error cometido por el observador, es decir, la diferencia entre el valor estimado del estado que nos da el observador y el valor verdadero:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \tag{9}$$

- La expresión del error de estimación de estado en el instante $k+1$ es

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\
&= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - [\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}]\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{x}(k) \\
&= (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] \\
&= (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) \qquad (10)
\end{aligned}$$

- La dinámica del error viene determinada por los autovalores de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$.
- Los autovalores de esta matriz deben estar dentro de la zona estable y que la dinámica del error sea muy rápida para que el error se anule lo antes posible.

Diseño de la ganancia del observador por comparación de coeficientes

- El diseño de la ganancia del observador se hace de forma similar al visto para la realimentación de estado, es decir, se determina la ganancia del observador $\mathbf{K}_e$ de forma que la ecuación característica del mismo tenga los polos en las posiciones deseadas $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = (z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n) = 0 \tag{11}$$

Supongamos el sistema definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{12}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{13}$$

y se desea diseñar un observador de estado para este sistema, teniendo en cuenta que se han ajustado los valores de las ganancias de la matriz **K** de realimentación de estado para que los polos en cadena cerrada del sistema estén en $p_1 = z - 0{,}5 - j0{,}5$ y $p_2 = z - 0{,}5 + j0{,}5$.

- **Solución:** Comprobemos que sea completamente observable

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

tiene rango 2, luego el sistema **es observable**.

- Para que la dinámica del error sea lo más rápida posible, situamos los polos del observador en el origen (**respuesta de tiempo mínimo, o *dead-beat***). Por lo tanto

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = z^2 = 0 \tag{15}$$

es decir

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = z^2 = 0 \tag{16}$$

y de aquí obtenemos

$$z^2 + z(k_{e1} + 0{,}5) + (0{,}5k_{e1} + k_{e2} + 1) = z^2 = 0 \tag{17}$$

e igualando los coeficientes $k_{e1} = -0{,}5$ y $k_{e2} = -0{,}75$

Diseño de la ganancia del observador

Por transformación

- Si el sistema está en una forma que no sea la forma canónica observable, el método de comparación de coeficientes puede dar lugar a cálculos complejos, especialmente para sistemas de orden elevado.
- Existe la posibilidad transformar el sistema a la forma canónica observable y diseñar en esta nueva representación el observador, y después convertirlo de nuevo a la representación que teníamos inicialmente.

- Supongamos que se tiene un sistema con la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (18) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (19) \end{aligned}$$

  y el observador de orden completo para esta representación viene expresado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (20) \end{aligned}$$

- Transformando la ecuación queda

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) \quad (21)$$

que es la expresión del observador de orden completo.

- De la expresión anterior, la relación de $\tilde{x}(k+1)$ y $\tilde{x}(k)$ y considerando $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, se tiene

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (22)$$

cuya ecuación característica es

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0 \quad (23)$$

- Al igual que para el caso del diseño de la realimentación de estado, es posible transformar el sistema a otra forma canónica, normalmente a la observable, diseñar aquí el observador y convertirlo de nuevo a la representación original.

- Para el sistema en la representación original la matriz de observabilidad es

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{24}$$

y supongamos que aplicamos una transformación **T** que transforma al sistema a la forma canónica observable

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\mathbf{x}'(k) \tag{25}$$

con lo que el nuevo sistema quedaría en la forma

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) \tag{26}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}'(k) \tag{27}$$

Diseño de la ganancia del observador

Por transformación

- La relación entre las matrices de observabilidad de ambas representaciones venía dada por

$$\mathbf{M'}_O = \mathbf{M}_O \mathbf{T} \tag{28}$$

y de aquí que

$$\mathbf{M}_O^{-1} \mathbf{M'}_O = \mathbf{T} \tag{29}$$

pudiéndose obtener la matriz de transformación **T** a partir de las dos matrices de observabilidad.

- Una vez que el sistema esta en la forma canónica observable y verifica la condición de observabilidad completa de estado, se diseña el observador de estado.
- En esta nueva representación tendremos que

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}' + \mathbf{K}'_e \mathbf{C}'| = (z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n) = 0 \tag{30}$$

e igualando los coeficientes podremos determinar la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}'_e$.

Diseño de la ganancia del observador

Por transformación

- Si aplicamos la transformación inversa $\mathbf{T}^{-1}$ al sistema y $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}'(k+1) &= (\mathbf{G}' - \mathbf{K}'_e\mathbf{C}')\tilde{\mathbf{x}}'(k) \\ \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}'\tilde{\mathbf{x}}'(k) \end{aligned}$$

  Para volver a la representación original aplicamos $\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, y recordando que $\mathbf{G}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}$ y $\mathbf{C}' = \mathbf{C}\mathbf{T}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{G} - \mathbf{T}\mathbf{K}'_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) \end{aligned}$$

- Comparando con el modelo de error de estimación de estado en el sistema original, tenemos que la matriz de ganancia del observador expresada en el sistema de representación original tiene la forma

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}\mathbf{K}'_e \tag{31}$$

- Nos interesa conocer cómo se comporta la dinámica del sistema al introducir el observador en el lazo de realimentación.
- Las ecuaciones del sistema y la señal de realimentación son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{Hu}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{Cx}(k) \\ \mathbf{u}(k) &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \tag{32}$$

Introduciendo la expresión de la señal de realimentación en la ecuación de estado, y sumando y restando el término $\mathbf{HKx}(k)$ en dicha expresión, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Gx}(k) - \mathbf{HK}\hat{\mathbf{x}}(k) \\ &= [\mathbf{G} - \mathbf{HK}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{HK}[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] \end{aligned} \tag{33}$$

Sustituyendo $\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ por $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ nos queda lo siguiente

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{G} - \mathbf{HK}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{HK}\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{34}$$

- Teniendo en cuenta ahora que la dinámica del error de estimación de estado cometido por el observador venía dada por

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}]\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{35}$$

- Combinando las expresiones de la ecuación de estado del sistema realimentado 34 y la ecuación de estado del error de estimación 35 en un único modelo de estado, tendremos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \tag{36}$$

- La ecuación característica del sistema con realimentación y observador se obtiene de 36 y vendrá dada por la siguiente expresión

$$\begin{vmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK} & -\mathbf{HK} \\ \mathbf{0} & z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{vmatrix} = 0 \tag{37}$$

- Se puede observar que la ecuación característica del sistema se puede escribir en la forma

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| \, . \, |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0 \tag{38}$$

- La expresión 38 nos dice que la ecuación característica del sistema con realimentación de estado y observador es el producto de las ecuaciones características del sistema realimentado y del observador de estado.
- Son independientes, lo que permite que se diseñen de forma independiente y posteriormente sean combinados.
- Para que los polos del observador no influyan en la dinámica del sistema, deben amortiguarse rápidamente, es decir, deben de estar situados próximos al origen o en él.

Observador de orden reducido

- En los sistemas donde podemos medir alguna de las variables, basta con estimar las variables de estado que no son medibles, **observadores de orden reducido**, y si el orden es el mínimo posible, **observador de orden mínimo**.

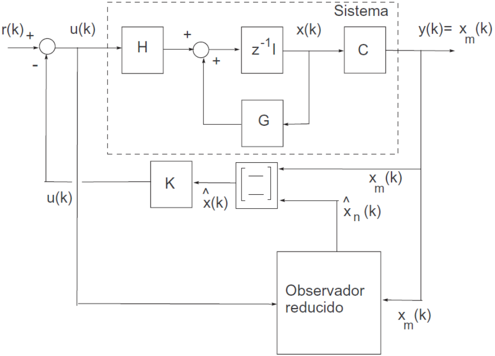

Figura 5: Observador de orden reducido.

Observador de orden reducido

- Supongamos que en el modelo del sistema parte de las variables de estado son medibles $\mathbf{x}_m$ y otras no $\mathbf{x}_n$.
- Dividimos el vector de estado $\mathbf{x}$ en dos submatrices

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k+1) \\ \mathbf{x}_n(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{mm} & \mathbf{G}_{mn} \\ \mathbf{G}_{nm} & \mathbf{G}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{H}_n \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{x}_n(k) \end{bmatrix} \qquad (39)
\end{aligned}
$$

y puesto en forma de ecuaciones tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_m(k+1) &= \mathbf{G}_{mm}\mathbf{x}_m(k) + \mathbf{G}_{mn}\mathbf{x}_n(k) + \mathbf{H}_m\mathbf{u}(k) \qquad (40) \\
\mathbf{x}_n(k+1) &= \mathbf{G}_{nm}\mathbf{x}_m(k) + \mathbf{G}_{nn}\mathbf{x}_n(k) + \mathbf{H}_n\mathbf{u}(k) \qquad (41)
\end{aligned}
$$

Observador de orden reducido

- De la ecuación 40 podemos medir o conocer todos los términos salvo $\mathbf{x}_n(k)$. Si separamos este término, la ecuación queda

$$\mathbf{x}_m(k+1) - \mathbf{G}_{mm}\mathbf{x}_m(k) - \mathbf{H}_m\mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{mn}\mathbf{x}_n(k) \tag{42}$$

  La ecuación 41 puede reescribirse agrupando los términos medibles

$$\mathbf{x}_n(k+1) = \mathbf{G}_{nn}\mathbf{x}_n(k) + [\mathbf{G}_{nm}\mathbf{x}_m(k) + \mathbf{H}_n\mathbf{u}(k)] \tag{43}$$

- Si comparamos las ecuaciones 42 y 43 con las de un sistema genérico

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{G}'\mathbf{x}'(k) + \mathbf{H}'\mathbf{u}'(k) \tag{44}$$

$$\mathbf{y}'(k) = \mathbf{C}'\mathbf{x}'(k) \tag{45}$$

  de forma que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(k) &= \mathbf{x}_n(k) \\
\mathbf{y}'(k) &= \mathbf{x}_m(k+1) - \mathbf{G}_{mm}\mathbf{x}_m(k) - \mathbf{H}_m\mathbf{u}(k) \qquad (46) \\
\mathbf{G}' &= \mathbf{G}_{nn} \\
\mathbf{H}'\mathbf{u}'(k) &= \mathbf{G}_{nm}\mathbf{x}_m(k) + \mathbf{H}_n\mathbf{u}(k) \\
\mathbf{C}' &= \mathbf{G}_{mn}
\end{aligned}$$

- Para el sistema 44 un observador de estado tiene la forma general

$$\hat{\mathbf{x}}'(k+1) = (\mathbf{G}' - \mathbf{K}_e\mathbf{C}')\hat{\mathbf{x}}'(k) + \mathbf{H}'\mathbf{u}'(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}'(k) \tag{47}$$

- Sustituyendo las matrices y vectores por las expresiones completas 46, se obtiene que el observador para la parte no medible del sistema es

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_n(k+1) &= (\mathbf{G}_{nn} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{mn})\hat{\mathbf{x}}_n(k) + \mathbf{G}_{nm}\mathbf{x}_m(k) + \mathbf{H}_n\mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{K}_e[\mathbf{x}_m(k+1) - \mathbf{G}_{mm}\mathbf{x}_m(k) - \mathbf{H}_m\mathbf{u}(k)] \end{aligned} \tag{48}$$

- Para el diseño de este observador de orden mínimo, tendremos que ajustar la matriz $\mathbf{K}_e$ de forma que los polos de la ecuación característica estén en unas posiciones determinadas por

$$|\mathbf{z}I - (\mathbf{G}_{nn} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{mn})| = 0 \tag{49}$$