

# OpenCourseWare

## Teoría de Máquinas

CRISTINA CASTEJÓN, EDUARDO CORRAL, RAÚL GISMEROS, MARIA JESÚS GÓMEZ,  
JESÚS MENESES, HIGINIO RUBIO, ABRAHAM VADILLO

### Transmisión por Engranajes

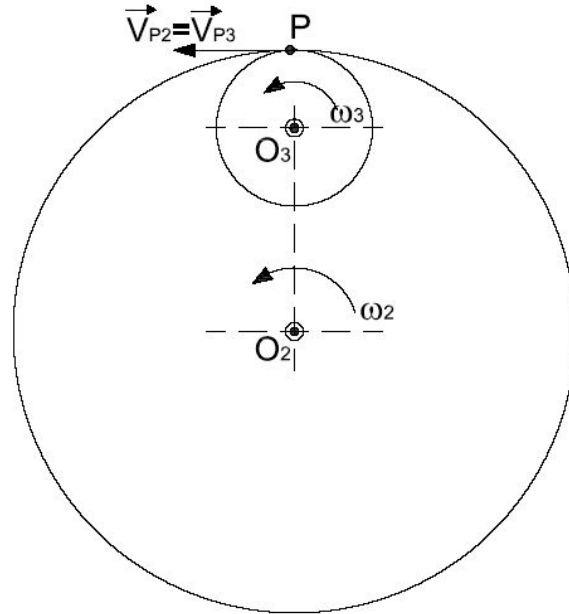


# Índice

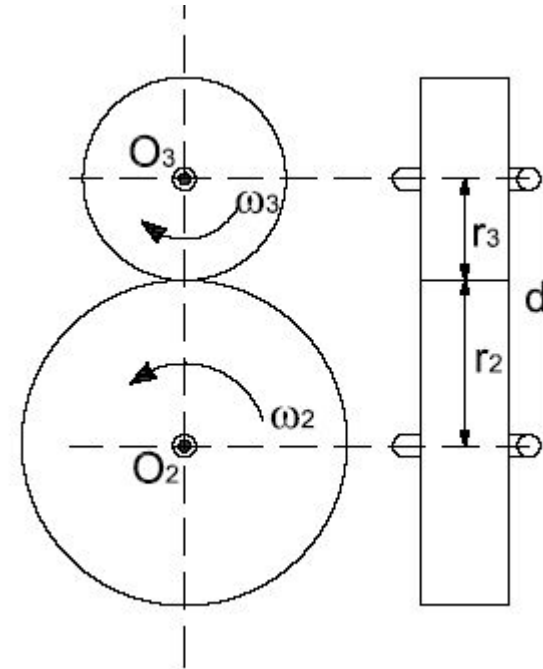
- Ruedas de fricción
- Tipos de engranajes
- Palancas rodantes
- Perfiles conjugados
  - Perfil de evolvente
    - La función evolvente
    - Características de este tipo de transmisión
- Nomenclatura de engranajes
- Perfiles normalizados
- Penetración e interferencia en engranajes
- Número límite de dientes
- Procedimientos de talla de engranajes
- Cálculo del espesor del diente
- Longitud de engrane y grado de recubrimiento
- Montaje de engranajes
  - Distancia entre ejes de funcionamiento

# Ruedas de Fricción (I)

Con  
conexión  
interna



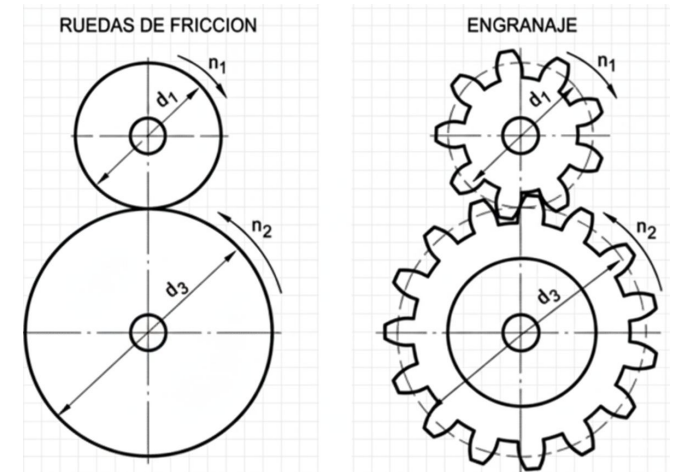
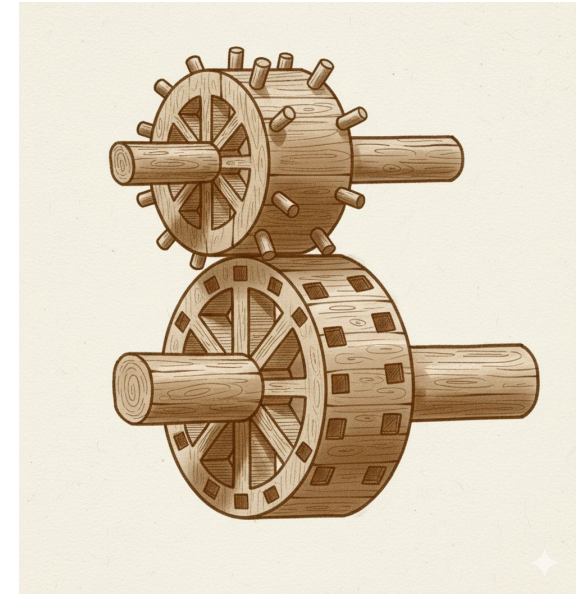
Con  
conexión  
externa



- Características:
  - Es el modo más sencillo de transmisión de potencia de un eje rotatorio a otro
  - Movimiento transmitido por **fricción**
- Inconvenientes
  - Máxima fuerza de fricción:  $F = \mu \cdot N$   Transmisión de par limitada

# Ruedas de Fricción (II)

- Si el par demandado requiere una fuerza tangencial superior a la máxima disponible □ **DESlizamiento entre ambos cilindros**
  - Desgaste
  - Asincronía
- **SOLUCIÓN:** Incorporar medios de trabamiento
  - Se establece una transmisión por fuerza y forma □ **ENGRANAJES**



Imágenes generadas con Gemini

# Ruedas de Fricción (III)

- Rodadura pura + relación de transmisión constante □  
Los perfiles sólo pueden ser **dos circunferencias**

## (a) Transmisión entre ejes paralelos

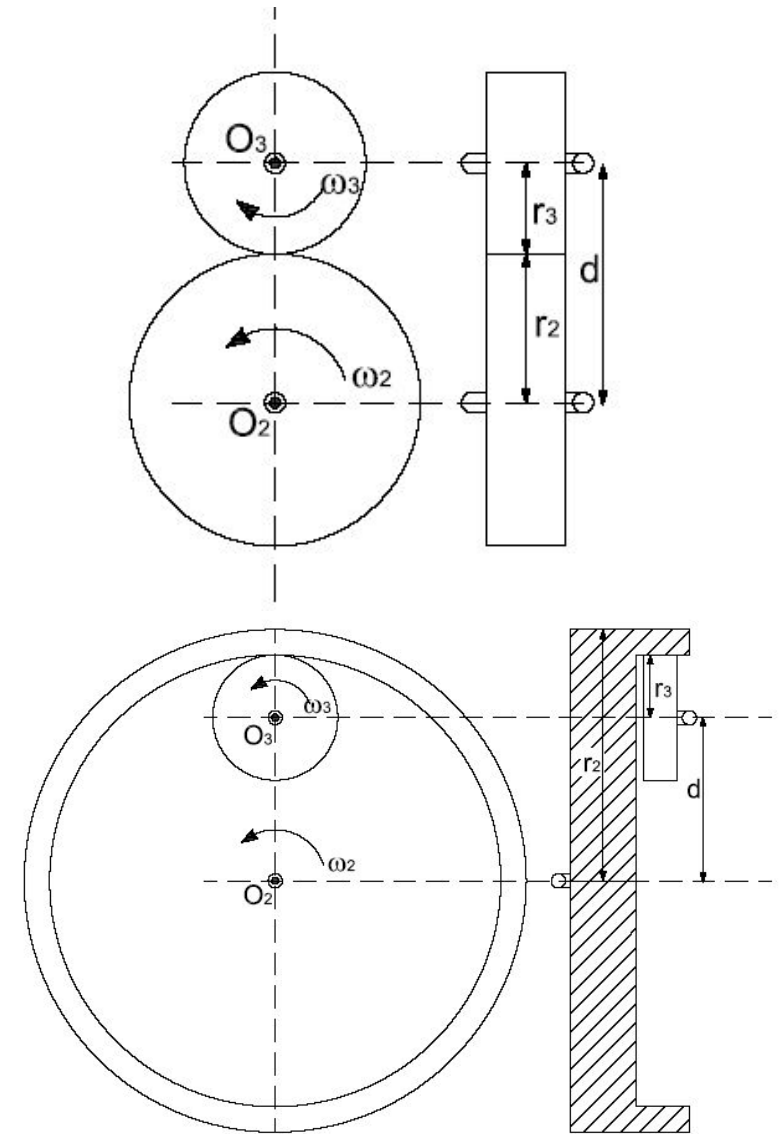
- CILINDROS de fricción:

- Externos
- Internos

$$i = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\frac{v_3}{r_3}}{\frac{v_2}{r_2}} = \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{r_2}{r_3}$$

- Si no hay deslizamiento:

$$v_2 = v_3 \Rightarrow i = \frac{r_2}{r_3}$$

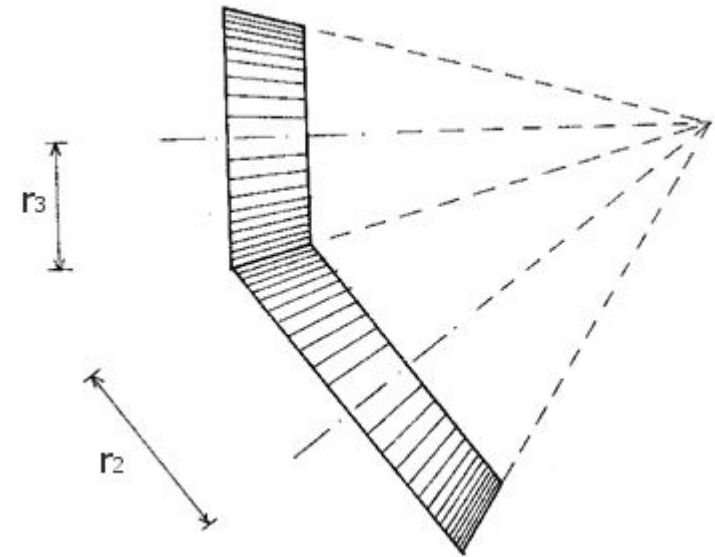


# Ruedas de Fricción (IV)

## (b) Transmisión entre ejes que se cortan

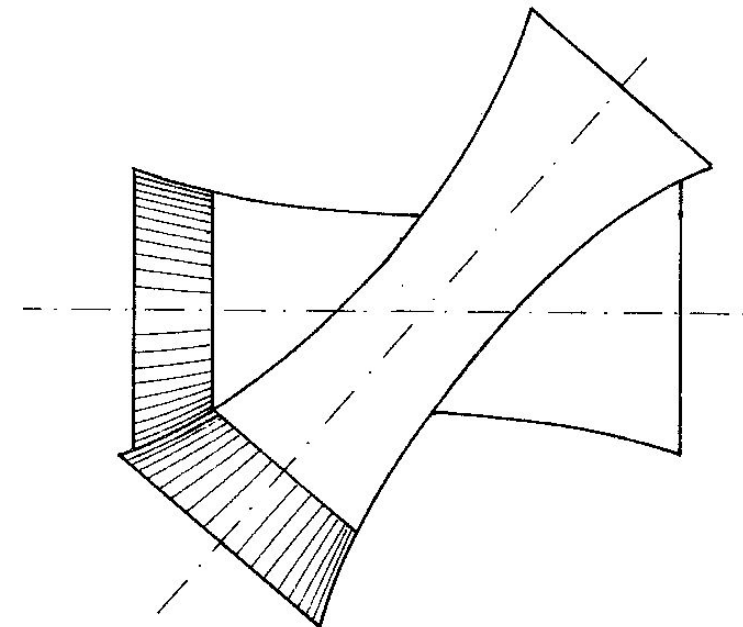
- CONOS de fricción:

$$i = \frac{r_2}{r_3}$$



## (c) Transmisión entre ejes que se cruzan

- HIPERBOLOIDES de fricción
- NO hay rodadura, pero las superficies son siempre tangentes entre sí



# TIPOS DE ENGRANAJES

Con ejes paralelos.  
Engranajes cilíndricos

- Rectos

- Externos

- Internos

- Helicoidales

- Simples

- Dobles

- De esqueleto de pescado (Herringbone)

Con ejes que se cortan.  
Engranajes cónicos

- Cónicos rectos

- Cónicos helicoidales

- Zerol

- De corona y piñón cilíndrico

Con ejes que se cruzan.  
Engranajes hiperbólicos

- Helicoidales cruzados

- De Sinfín Cavex

- De Sinfín envolvente

- Hipoidales

- Espiroide

- Helicon Beveloid

# Sistema de engrane Rueda Dentada-Cremallera

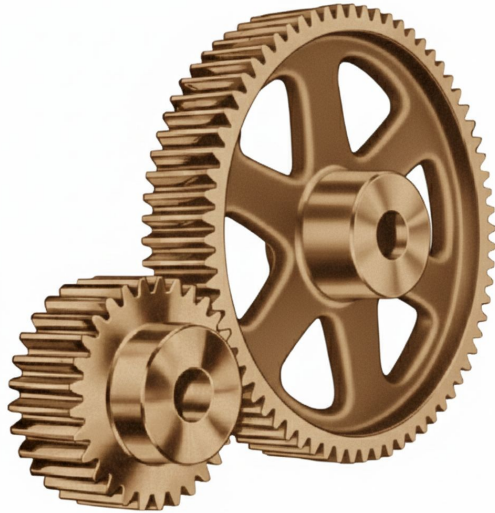


Imagen generada con Gemini

- Transmiten el movimiento rotativo en movimiento lineal

# Engranajes Cilíndricos de Dentado Recto

- Transmiten el movimiento entre ejes paralelos



(a) **externos**: sentidos de giro **opuestos**



(b) **internos**: sentidos de giro **iguales**

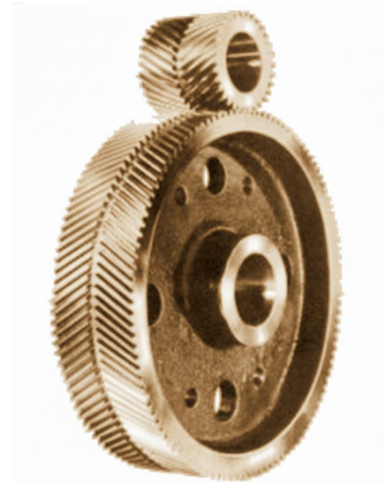
Imágenes generadas con Gemini

# Engranajes Cilíndricos de Dentado Oblicuo

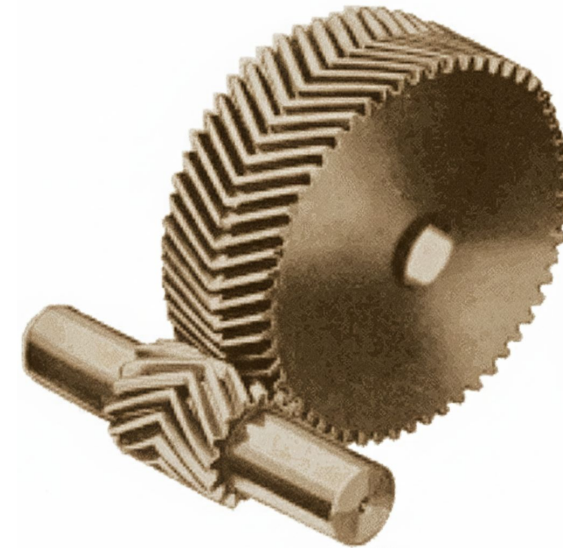
- Dientes inclinados □ soportan carga axial □ engrane progresivo:
  - Menos VIBRACIONES
  - Menos RUIDO



(a) simple



(b) doble



(c) Herringbone

Imágenes  
generadas con  
Gemini

- En (b) y (c) están compensadas las componentes axiales de los esfuerzos

# Engranajes Cónicos

- Transmiten par y velocidad entre ejes que se **cortan**



(a) Cónico rectos



(b) Cónico helicoidal

Imágenes  
generadas con  
Gemini

# Engranajes Hiperbólicos

- Transmiten par y velocidad entre ejes que se **cruzan** en el espacio

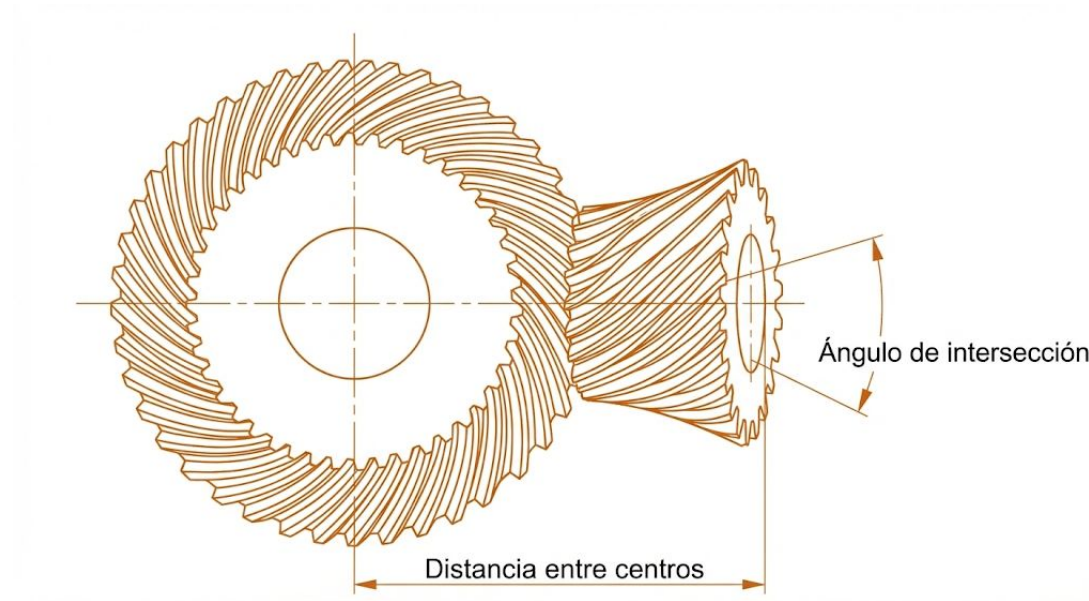
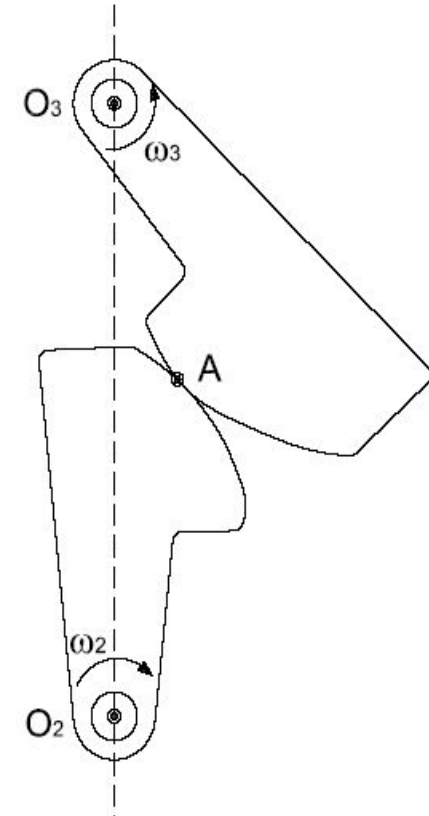


Imagen generada con Gemini

# Palancas Rodantes

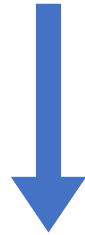
- Sea un mecanismo de transmisión entre ejes formado por dos elementos (palancas) en contacto, en el punto **A**
- El elemento 2 gira en torno al punto  $O_2$ , en sentido horario, con una velocidad angular  $\omega_2$  (conocida)
- El elemento 2 (elemento conductor) acciona al elemento 3 (elemento conducido)
- El elemento 3 gira en torno al punto  $O_3$ , en sentido antihorario, con velocidad angular  $\omega_3$  (desconocida)
- Condiciones deseables en una transmisión mecánica:
  - El contacto debe ser continuo, no se debe producir despegue ni penetración □ **Condición de contacto permanente**
  - La relación de transmisión entre velocidad angular de salida y de entrada debe ser constante □ **Relación de transmisión constante**
  - El contacto debe ser por rodadura, no debe existir deslizamiento en el contacto □ **Condición de rodadura pura**



# Palancas Rodantes.

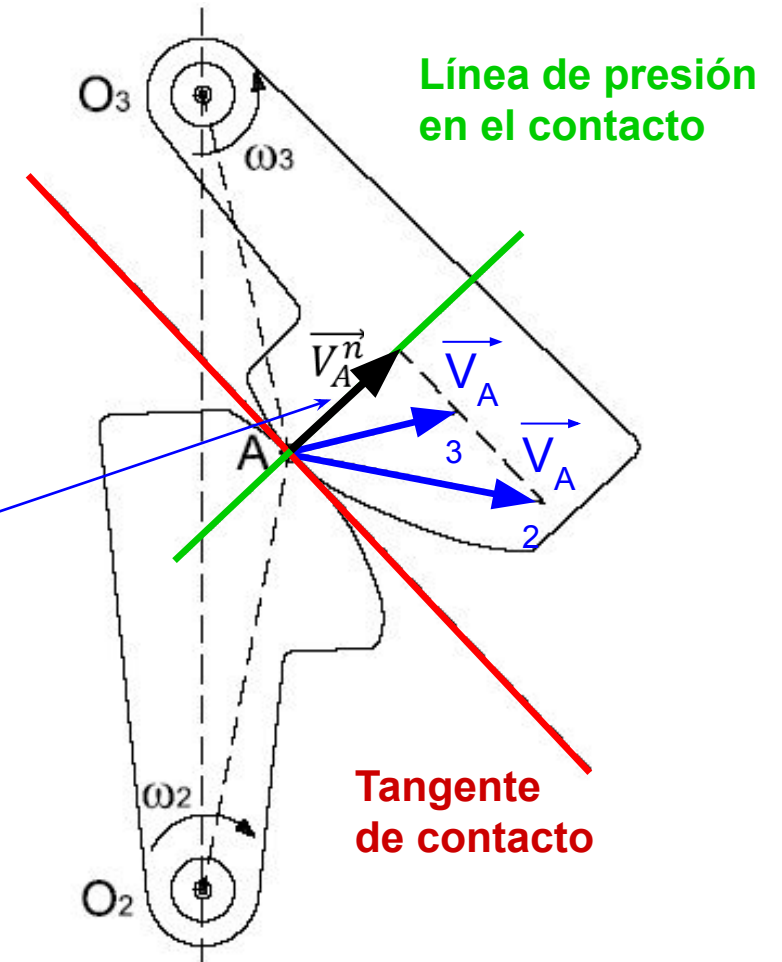
## Condición de contacto permanente

- Los perfiles NO deben penetrarse ni separarse



- Las proyecciones de las velocidades de los dos elementos ( $\vec{V}_{A2}$  y  $\vec{V}_{A3}$ ) sobre la dirección normal a la tangente de contacto (línea de presión) deben ser iguales

$$\vec{v}_{A2}^n = \vec{v}_{A3}^n$$



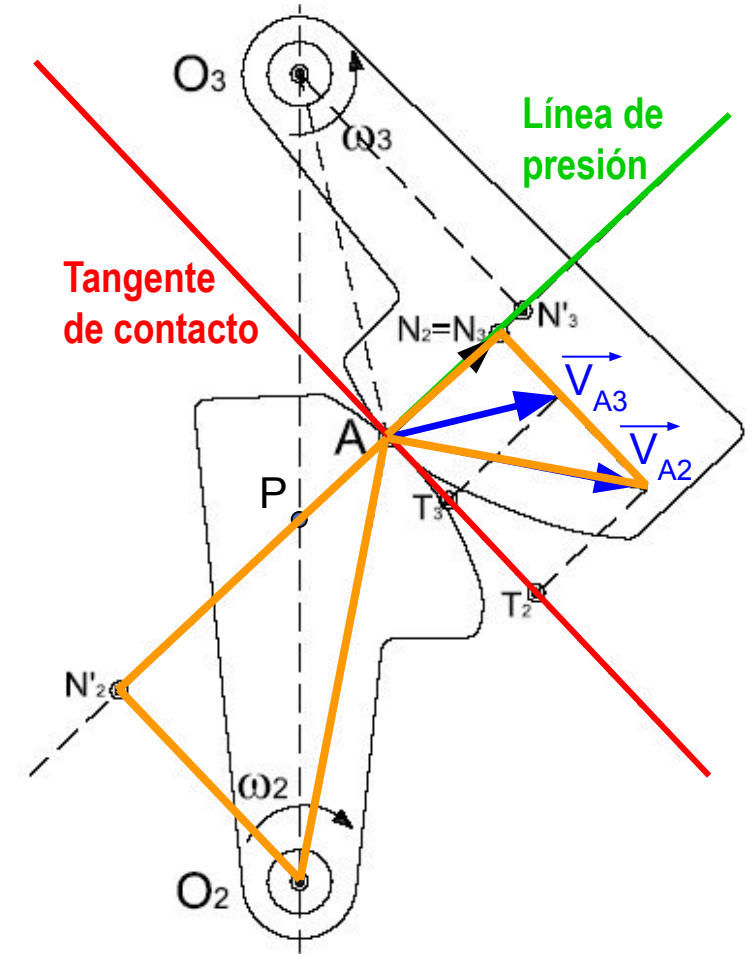
# Palancas Rodantes.

## Relación de transmisión constante

$$i = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\frac{V_{A3}}{O_3A}}{\frac{V_{A2}}{O_2A}}$$

$O_2 - A - N'_2$  semejante a  $V_{A2} - N_2 - A$

$$\frac{V_{A2}}{O_2A} = \frac{AN_2}{O_2N'_2}$$



# Palancas Rodantes.

## Relación de transmisión constante

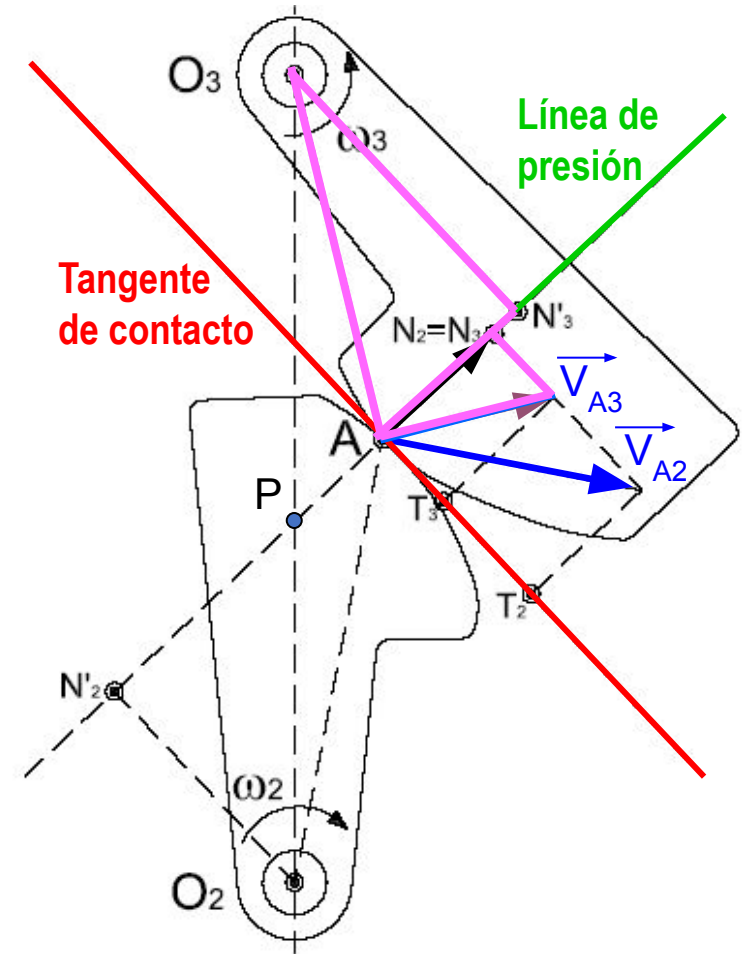
$$i = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\frac{V_{A3}}{O_3A}}{\frac{V_{A2}}{O_2A}}$$

$O_2 - A - N'_2$  semejante a  $V_{A2} - N_2 - A$

$$\frac{V_{A2}}{O_2A} = \frac{\overline{AN_2}}{O_2N'_2}$$

$O_3 - A - N'_3$  semejante a  $V_{A3} - N_3 - A$

$$\frac{V_{A3}}{O_3A} = \frac{\overline{AN_3}}{O_3N'_3}$$



# Palancas Rodantes.

## Relación de transmisión constante

$$\frac{\overline{V_{A2}}}{\overline{O_2A}} = \frac{\overline{AN_2}}{\overline{O_2N'_2}}$$

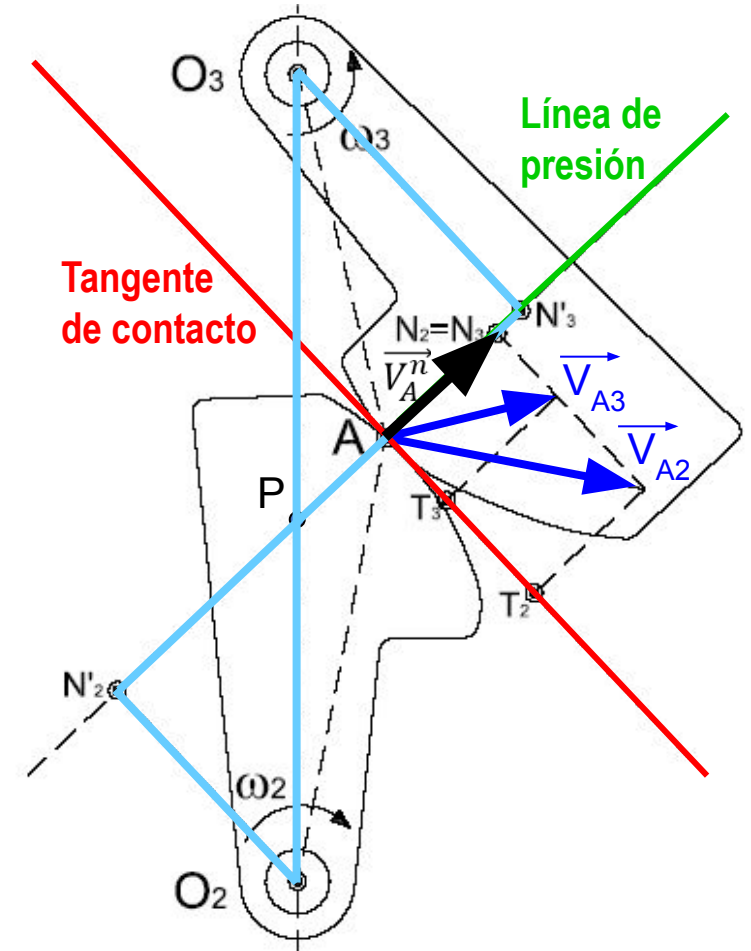
$$\frac{\overline{V_{A3}}}{\overline{O_3A}} = \frac{\overline{AN_3}}{\overline{O_3N'_3}}$$

$$i = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\frac{\overline{V_{A3}}}{\overline{O_3A}}}{\frac{\overline{V_{A2}}}{\overline{O_2A}}} = \frac{\frac{\overline{AN_3}}{\overline{O_3N'_3}}}{\frac{\overline{AN_2}}{\overline{O_2N'_2}}}$$

Por la condición de contacto permanente:

$$\overline{V_A^n} = \overline{V_{A2}^n} = \overline{V_{A3}^n} \Rightarrow \overline{AN_2} = \overline{AN_3} \Rightarrow i = \frac{\overline{O_2N'_2}}{\overline{O_3N'_3}}$$

$$O_2 - N'_2 - P \text{ semejante a } O_3 - N'_3 - P \Rightarrow i = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_3P}} = cte.$$



- La normal común y la línea de centros se cortan en un punto fijo P.
- Los perfiles que cumplen esta condición se llaman **PERFILES CONJUGADOS**

# Palancas Rodantes.

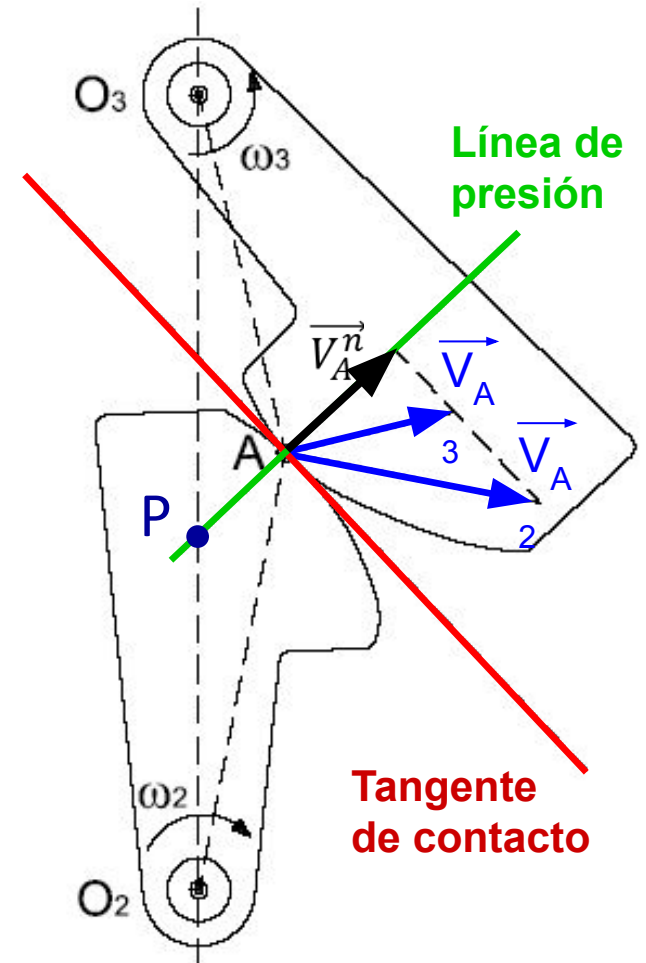
## Condición de rodadura pura

- **Deslizamiento:** diferencia entre las velocidades tangenciales en el punto A  $\square \vec{V}_{Deslizamiento} = \vec{V}_{A2}^t - \vec{V}_{A3}^t$
- Hay **rodadura pura** cuando las componentes tangenciales de  $\vec{V}_{A2}$  y  $\vec{V}_{A3}$  son iguales

$$\left. \begin{array}{l} \text{Contacto permanente} \quad \vec{V}_{A2}^n = \vec{V}_{A3}^n \\ \text{Rodadura pura} \quad \vec{V}_{A2}^t = \vec{V}_{A3}^t \end{array} \right\} \quad \vec{V}_{A2} = \vec{V}_{A3}$$

- Para que la condición de igualdad  $\vec{V}_{A2} = \vec{V}_{A3}$  se cumpla, los puntos  $O_2$ ,  $O_3$  y A deben estar alineados:  $\vec{V}_{A2} \perp \vec{O_2A}$   
 $\vec{V}_{A3} \perp \vec{O_3A}$

**RODADURA PURA**  $\square$  El contacto se produce sobre la línea de centros, en el punto P



# Palancas Rodantes.

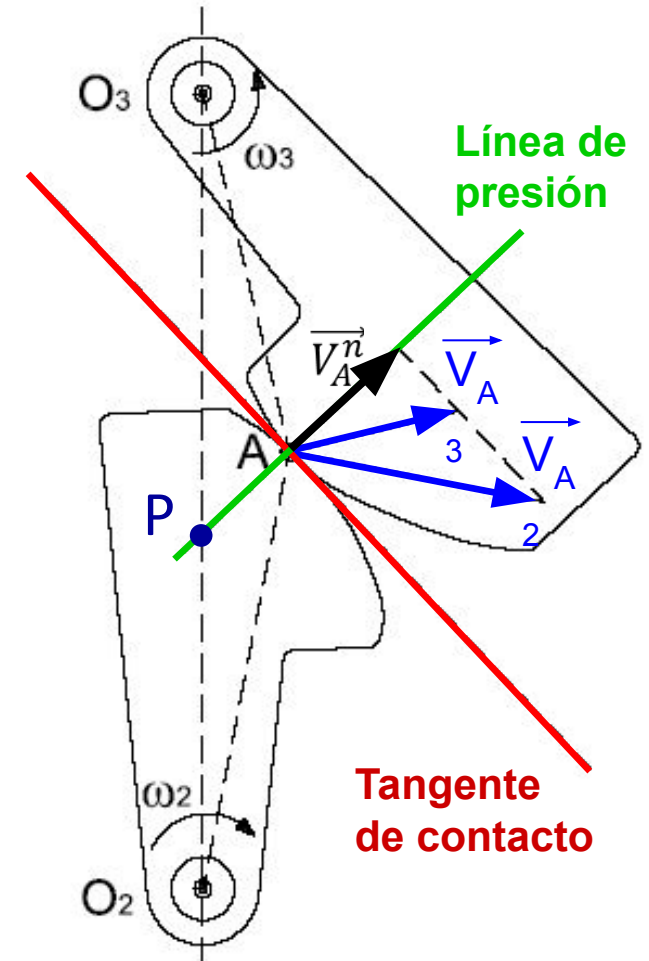
## Resumen

- Condición de contacto permanente  $\vec{V}_{A2}^n = \vec{V}_{A3}^n$
- Relación de transmisión constante  $\square$  **Perfiles conjugados**

$$i = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_3P}} = cte$$

- Condición de rodadura pura  $\square$  el contacto se produce sobre la línea de centros, en el punto P ( $O_2$ ,  $O_3$ , A están alineados). **Perfiles rodantes**

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V}_{A2}^n = \vec{V}_{A3}^n \\ \vec{V}_{A2}^t = \vec{V}_{A3}^t \end{array} \right\} \quad \vec{V}_{A2} = \vec{V}_{A3}$$



# Perfiles conjugados

- Transmisión del movimiento con relación constante de velocidades angulares
  - OBJETIVO: Evitar deslizamientos entre elementos rodantes
  - SOLUCIÓN: Incorporar **dientes** de cualquier forma

## HISTORIA

- Engranajes primitivos (desde 200 a.C.): ruedas giratorias de madera a las que se fijaban pivotes de formas rudimentarias (usados en molinos de viento, ruedas hidráulicas, etc.)
- Aparición del motor de vapor (  $\approx 1750$  ):
  - Se requieren mayores cargas y velocidades
  - Las transmisiones NO uniformes provocaban fuertes choques entre estos primeros dientes rudimentarios y los destruían
  - Surge la necesidad de obtener de dientes que proporcionen una transmisión uniforme, con relación constante de las velocidades angulares de entrada y salida: **PERFILES CONJUGADOS**

# Perfiles conjugados usados en transmisiones por engranajes

- En teoría pueden emplearse cualquier pareja de perfiles conjugados
- Por consideraciones prácticas, sólo se emplean dos tipos de perfiles conjugados:

- **Perfil cicloide:**

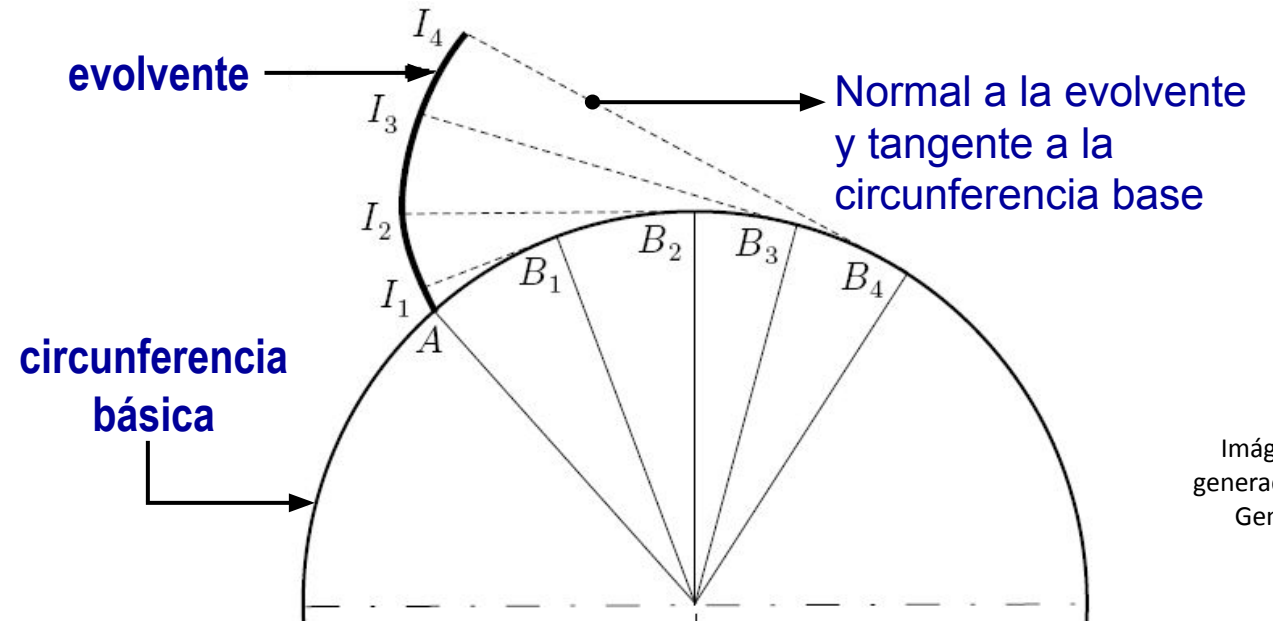
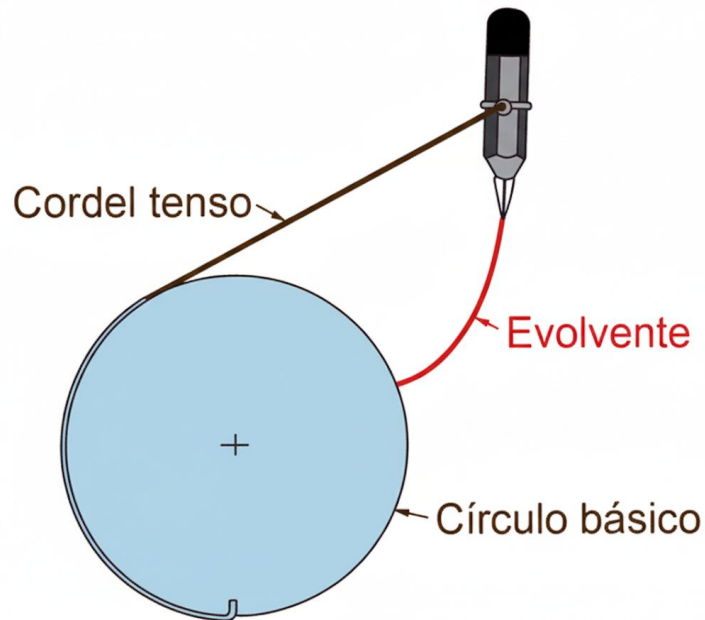
- El más empleado en la Revolución Industrial hasta principios del siglo XX, pero hoy sólo se utilizan en mecanismos de relojería.

- **Perfil de evolvente:**

- Actualmente es el perfil de uso universal, salvo en relojería y bombas de paletas.
  - Ventajas:
    - Versatilidad a la hora de diseñar.
    - Otras características inherentes a su geometría.

# Perfil de evolvente del círculo

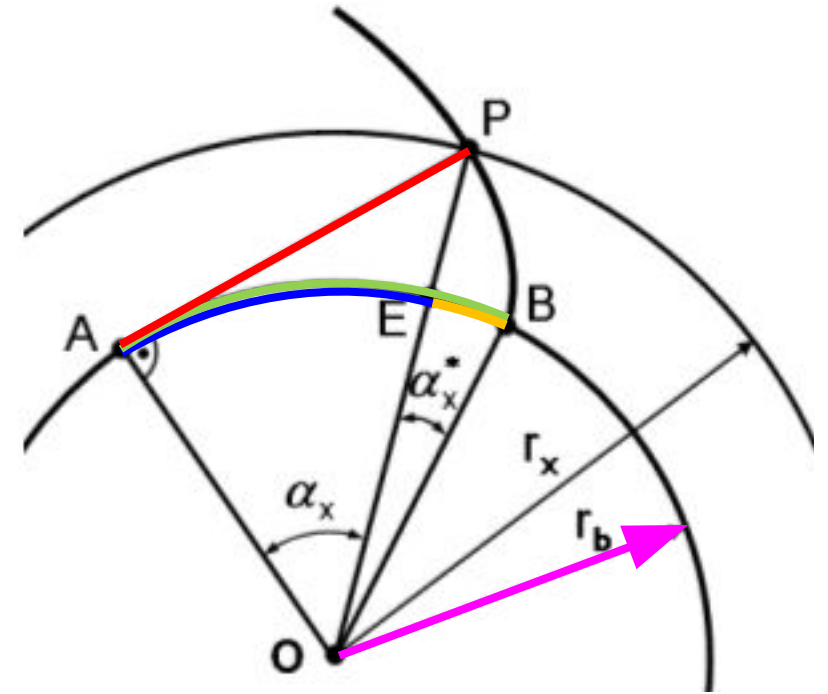
- “Curva generada por un punto fijo de una recta que rueda sin deslizar sobre una circunferencia llamada circunferencia básica”
- Es la curva que trazaría una cuerda tensa al desenrollarse de un cilindro
  - El cordel es tangente a la circunferencia
  - El centro de curvatura es el punto de tangencia del cordel y la circunferencia base
  - La evolvente es siempre normal al cordel



# La función evolvente

- **P** punto genérico de radio  $r_x$ .
- $\alpha^*$  al ángulo formado por **B-O-E**.
- $\alpha$  al ángulo formado por **P-O-A**.
- Por las propiedades de la evolvente de la circunferencia, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\alpha_x^* = \frac{\widehat{EB}}{r_b} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AE}}{r_b} = \frac{\widehat{AP}}{r_b} - \frac{\widehat{AE}}{r_b} = \operatorname{tg} \alpha_x - \alpha_x$$



**Función evolvente**

$$Ev\alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$$

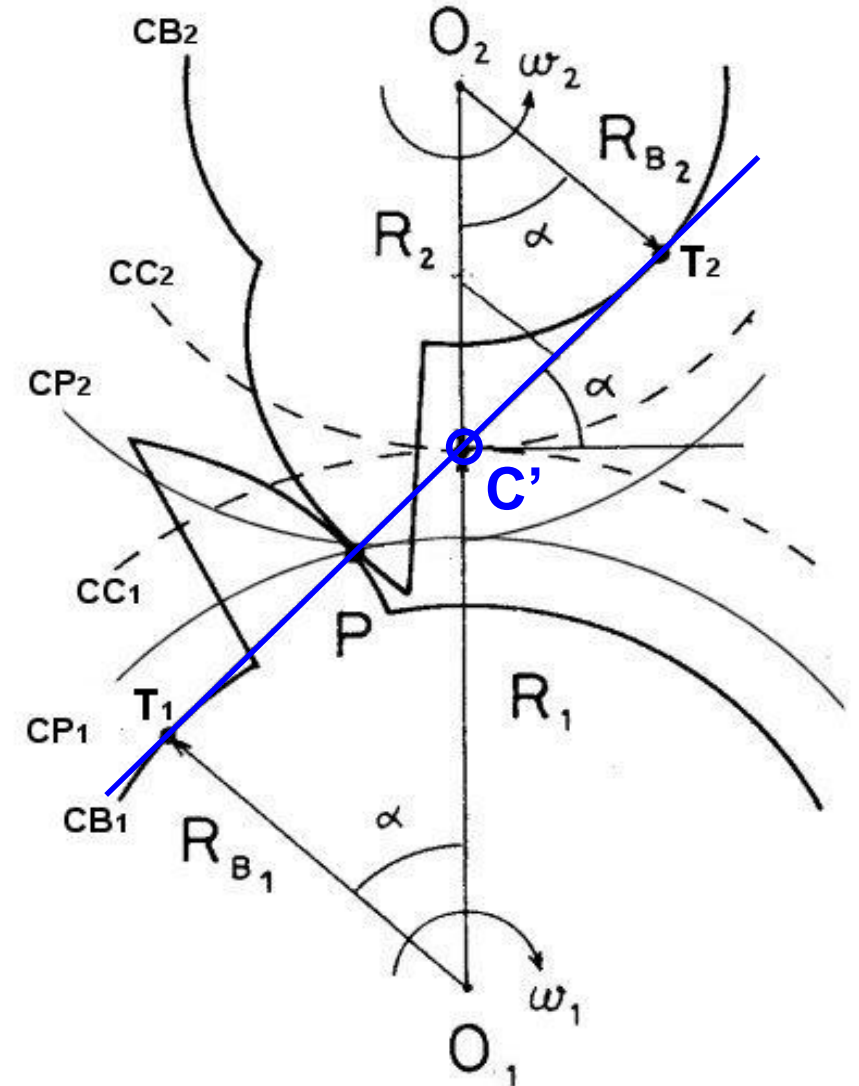
# Tabla para el cálculo de evolventes

| GRADOS (°) | 0        | 0,1      | 0,2      | 0,3      | 0,4      | 0,5      | 0,6      | 0,7      | 0,8      | 0,9      |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 11         | 0,002394 | 0,002461 | 0,002528 | 0,002598 | 0,002668 | 0,002739 | 0,002812 | 0,002887 | 0,002962 | 0,003039 |
| 12         | 0,003117 | 0,003197 | 0,003277 | 0,003360 | 0,003443 | 0,003529 | 0,003615 | 0,003703 | 0,003792 | 0,003883 |
| 13         | 0,003975 | 0,004069 | 0,004164 | 0,004261 | 0,004359 | 0,004459 | 0,004561 | 0,004664 | 0,004768 | 0,004874 |
| 14         | 0,004982 | 0,005091 | 0,005202 | 0,005315 | 0,005429 | 0,005545 | 0,005662 | 0,005782 | 0,005903 | 0,006025 |
| 15         | 0,006150 | 0,006276 | 0,006404 | 0,006534 | 0,006665 | 0,006799 | 0,006934 | 0,007071 | 0,007209 | 0,007350 |
| 16         | 0,007493 | 0,007637 | 0,007784 | 0,007932 | 0,008082 | 0,008234 | 0,008388 | 0,008544 | 0,008702 | 0,008863 |
| 17         | 0,009025 | 0,009189 | 0,009355 | 0,009523 | 0,009694 | 0,009866 | 0,010041 | 0,010217 | 0,010396 | 0,010577 |
| 18         | 0,010760 | 0,010946 | 0,011133 | 0,011323 | 0,011515 | 0,011709 | 0,011906 | 0,012105 | 0,012306 | 0,012509 |
| 19         | 0,012715 | 0,012923 | 0,013134 | 0,013346 | 0,013562 | 0,013779 | 0,013999 | 0,014222 | 0,014447 | 0,014674 |
| 20         | 0,014904 | 0,015137 | 0,015372 | 0,015609 | 0,015849 | 0,016092 | 0,016337 | 0,016585 | 0,016836 | 0,017089 |
| 21         | 0,017345 | 0,017603 | 0,017865 | 0,018129 | 0,018395 | 0,018665 | 0,018937 | 0,019212 | 0,019490 | 0,019770 |
| 22         | 0,020054 | 0,020340 | 0,020629 | 0,020921 | 0,021217 | 0,021514 | 0,021815 | 0,022119 | 0,022426 | 0,022736 |
| 23         | 0,023049 | 0,023365 | 0,023684 | 0,024006 | 0,024332 | 0,024660 | 0,024992 | 0,025326 | 0,025664 | 0,026005 |
| 24         | 0,026350 | 0,026697 | 0,027048 | 0,027402 | 0,027760 | 0,028121 | 0,028485 | 0,028852 | 0,029223 | 0,029598 |
| 25         | 0,029975 | 0,030357 | 0,030741 | 0,031130 | 0,031521 | 0,031917 | 0,032315 | 0,032718 | 0,033124 | 0,033534 |
| 26         | 0,033947 | 0,034364 | 0,034785 | 0,035209 | 0,035637 | 0,036069 | 0,036505 | 0,036945 | 0,037388 | 0,037835 |
| 27         | 0,038287 | 0,038742 | 0,039201 | 0,039664 | 0,040131 | 0,040602 | 0,041076 | 0,041556 | 0,042039 | 0,042526 |
| 28         | 0,043017 | 0,043513 | 0,044012 | 0,044516 | 0,045024 | 0,045537 | 0,046054 | 0,046575 | 0,047100 | 0,047630 |
| 29         | 0,048164 | 0,048702 | 0,049245 | 0,049792 | 0,050344 | 0,050901 | 0,051462 | 0,052027 | 0,052597 | 0,053172 |
| 30         | 0,053751 | 0,054336 | 0,054924 | 0,055518 | 0,056116 | 0,056720 | 0,057328 | 0,057940 | 0,058558 | 0,059181 |
| 31         | 0,059809 | 0,060441 | 0,061079 | 0,061721 | 0,062369 | 0,063022 | 0,063680 | 0,064343 | 0,065012 | 0,065685 |
| 32         | 0,066364 | 0,067048 | 0,067738 | 0,068432 | 0,069133 | 0,069838 | 0,070549 | 0,071266 | 0,071988 | 0,072716 |
| 33         | 0,073449 | 0,074188 | 0,074932 | 0,075683 | 0,076439 | 0,077200 | 0,077968 | 0,078741 | 0,079520 | 0,080305 |
| 34         | 0,081097 | 0,081894 | 0,082697 | 0,083506 | 0,084321 | 0,085142 | 0,085970 | 0,086804 | 0,087644 | 0,088490 |

# Perfil de evolvente.

## Características de la transmisión (I)

- El contacto entre dos perfiles de evolvente se efectúa sobre la tangente común  $T_1T_2$  a las respectivas circunferencias básicas.
- Esta línea se llama línea de engrane.
- Cualquier punto de contacto  $P$  está sobre dicha línea de engrane.
- $T_1T_2$  es la normal común a ambos perfiles en el punto de engrane  $P$ .
- $T_1T_2$  es única  $\rightarrow$  Corta a la línea de centros en un punto fijo  $C \rightarrow$  Relación de Transmisión constante



# Perfil de evolvente.

## Características de la transmisión (II)

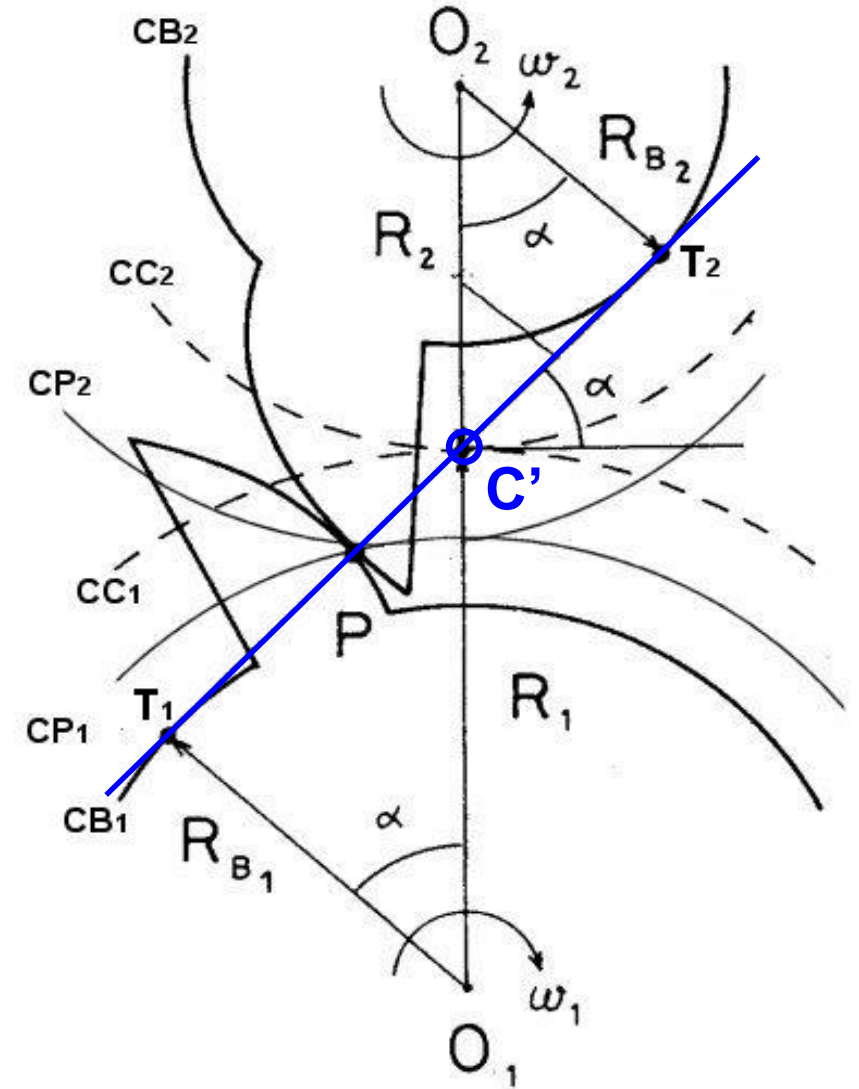
- Para que el sistema de transmisión sea eficiente, se debe cumplir:

### La ley fundamental del engrane

- La relación de transmisión debe ser constante.

$$i = \frac{\omega_{salida}}{\omega_{entrada}} = cte$$

- La normal común al perfil del diente, en todos los puntos de contacto, dentro del segmento de engrane, debe pasar por un punto fijo de la línea de centros, llamado punto primitivo C'.



# Perfil de evolvente.

## Características de la transmisión (III)

- Por las características de la función evolvente □ La longitud recorrida por el punto de contacto sobre la línea de engrane es igual al arco girado por las circunferencias básicas.

$$\widehat{AA'} = \widehat{Q_1Q_1'} = \widehat{Q_2Q_2'}$$

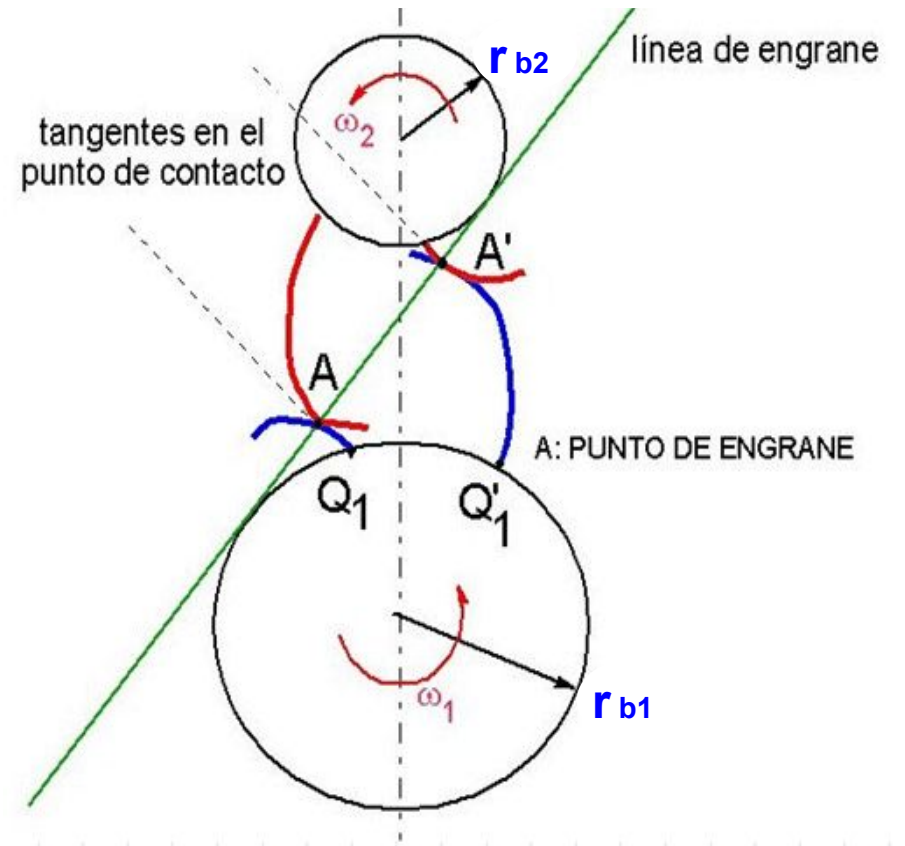
- Como  $\widehat{QQ'} = \alpha \cdot r_b$

$$\alpha_1 \cdot r_{b1} = \alpha_2 \cdot r_{b2}$$

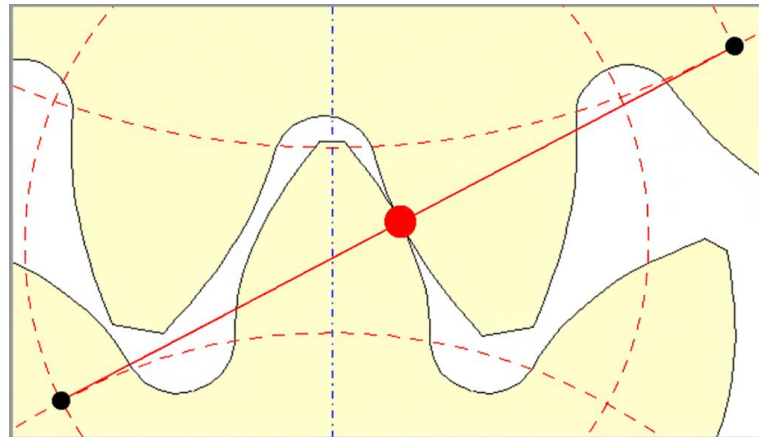
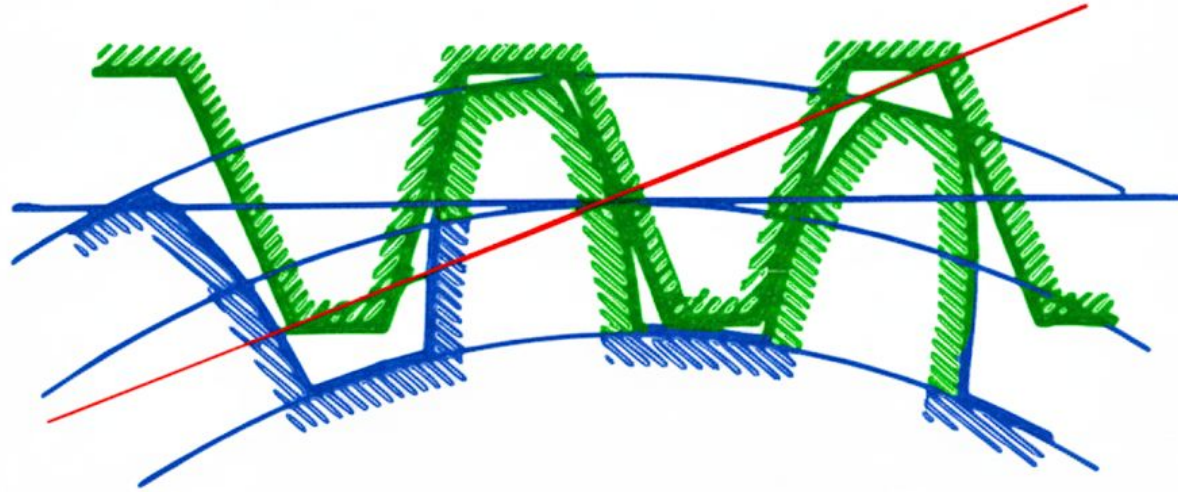
$$\omega_1 \cdot \Delta t \cdot r_{b1} = \omega_2 \cdot \Delta t \cdot r_{b2} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

- Así pues

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_{b1}}{r_{b2}} = cte$$



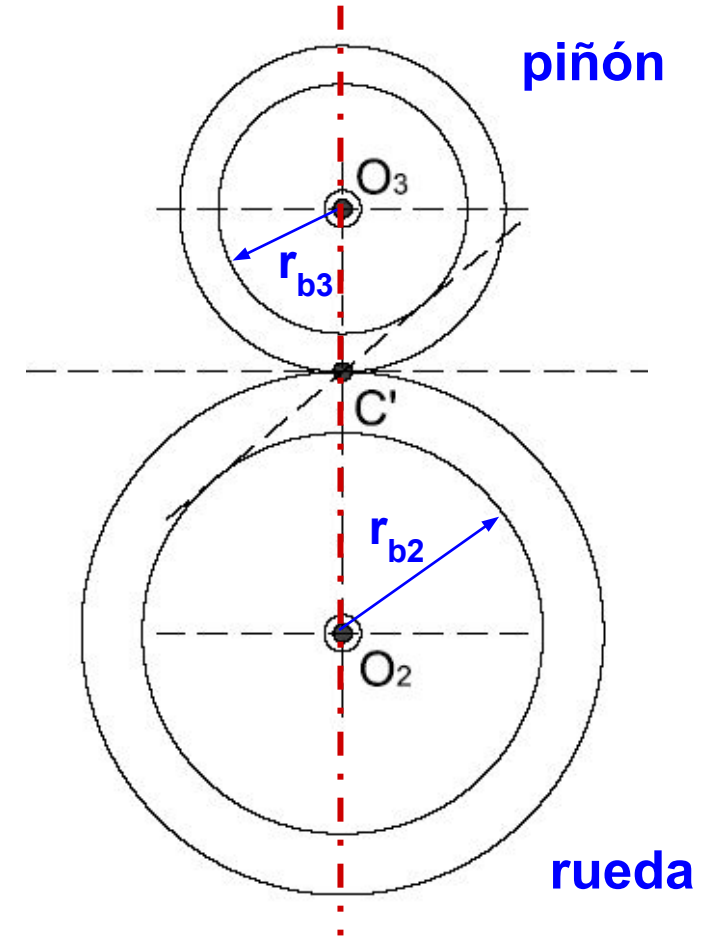
# Línea de engrane



# Nomenclatura

## Pareja de ruedas (I)

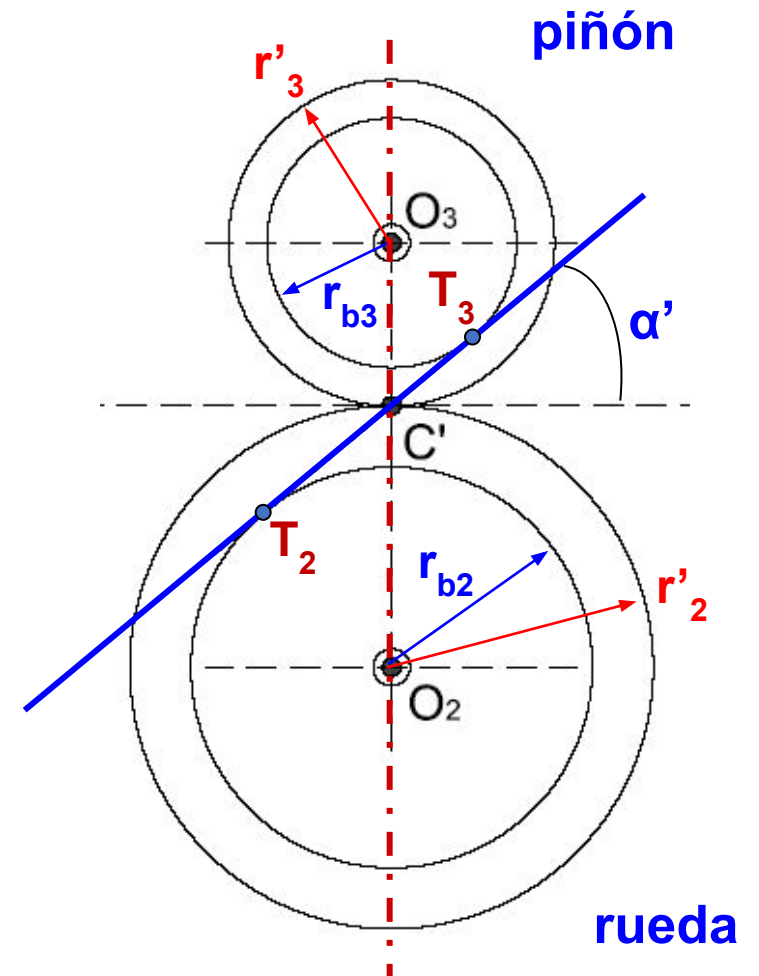
- **Piñón**: Rueda dentada de menor diámetro
- **Rueda**: Rueda dentada de mayor diámetro
- **Circunferencia base**  $r_b$ : Circunferencias a partir de las cuales se generan los perfiles de evolvente
- **Línea de centros**: Línea que une los centros,  $O_1$  y  $O_2$  de las dos circunferencias básicas



# Nomenclatura.

## Pareja de ruedas (II)

- Línea de engrane,  $T_2-T_3$ : tangente común a las circunferencias básicas. Sobre ella se produce el contacto entre los dientes
- Punto primitivo,  $C'$  : punto de intersección de la línea de engrane con la línea de centros
- Circunferencias primitivas de funcionamiento,  $r'$  : circunferencias de las teóricas ruedas de fricción a las que se han incorporado dientes. Su radio es tal que el movimiento de rodadura entre ambas tendría lugar en el punto primitivo  $C'$
- Ángulo de presión de funcionamiento,  $\alpha'$  : ángulo que forma la línea de presión con la tangente común a las circunferencias primitivas por el punto  $C'$

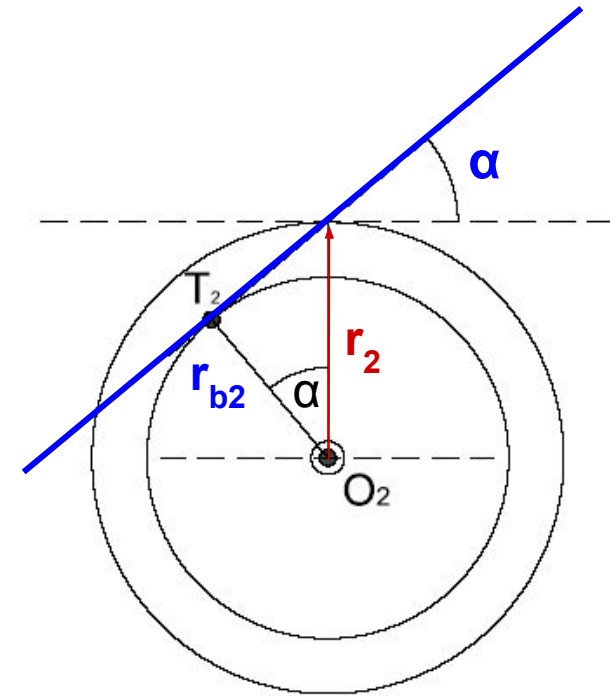


# Nomenclatura.

## Rueda aislada (I)

- Circunferencia primitiva de referencia,  $r$   
ángulo de presión de referencia,  $\alpha$ :
  - Estos parámetros se usan para referir a ellos las magnitudes geométricas de una rueda aislada.
  - La circunferencia primitiva de referencia sería aquella a la que le correspondería un ángulo de presión de referencia, normalizado a **14.5º**, **20º** o **25º**, siendo el de **20º** el valor más habitual.

$$r_b = r \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad i = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_2}{r_1}$$



# Nomenclatura.

## Rueda aislada (II)

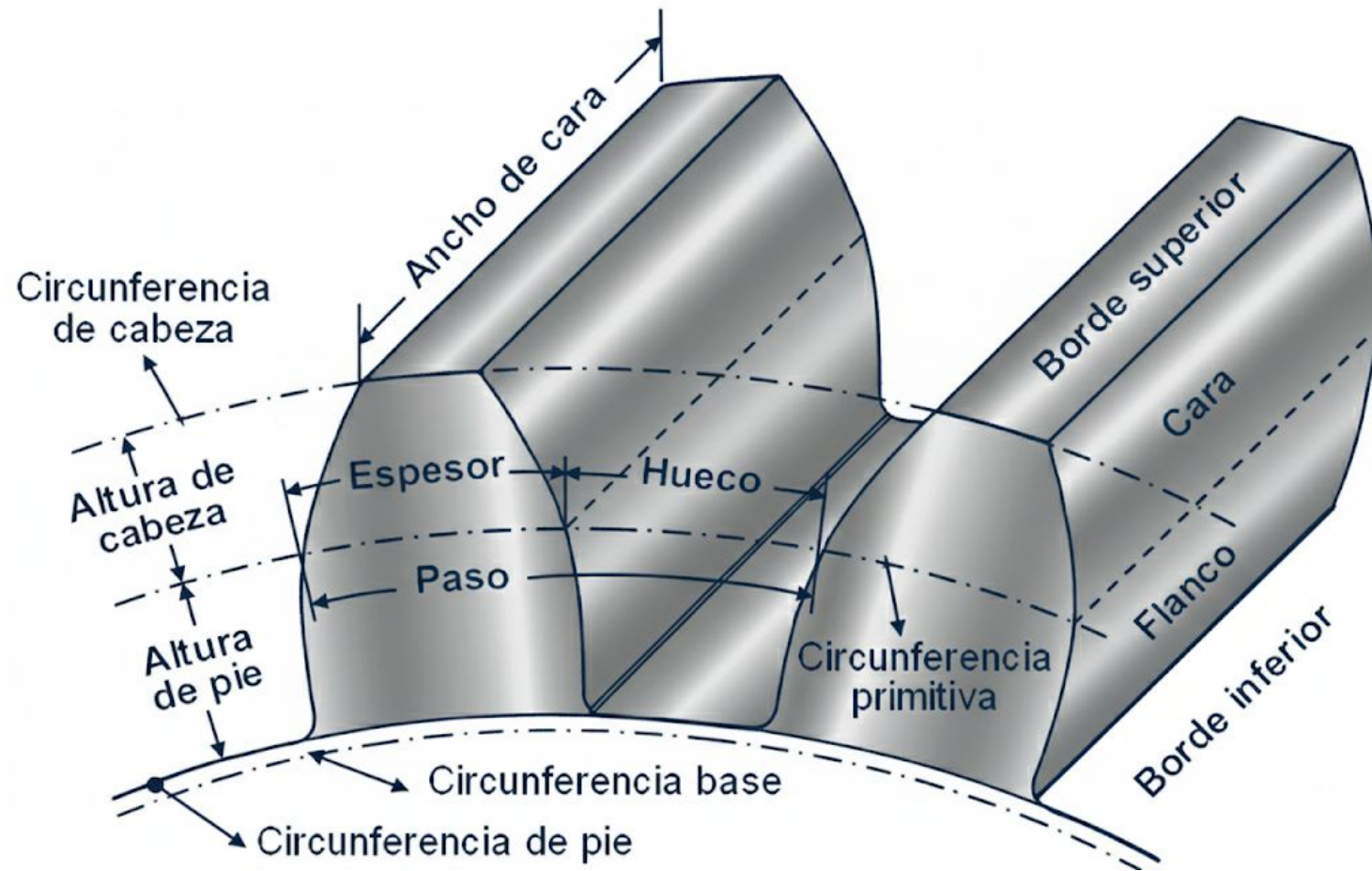


Imagen generada con Gemini

# Nomenclatura.

## Rueda aislada (III)

- **Número de dientes de la rueda,  $z$**
- **Paso,  $p$** : Distancia entre puntos homólogos de dos dientes consecutivos de una misma rueda, medida sobre la circunferencia primitiva de referencia.  
Para que dos ruedas engranen deben tener el mismo paso.
- **Módulo,  $m$** : Cociente entre el diámetro primitivo de referencia y el número de dientes.  
Dos ruedas engranan si tienen el mismo módulo.
- **Paso diametral (diametral pitch),  $dp$** : cociente entre el número de dientes y el diámetro primitivo de referencia expresado en pulgadas

$$p = \frac{2\pi r}{z}$$

$$m = \frac{2r}{z} = \frac{p}{\pi}$$

$$i = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{mz_1}{2}}{\frac{mz_2}{2}} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$dp = \frac{z}{2 \cdot r \text{ (pulgadas)}}$$

# Nomenclatura.

## Parámetros del dentado (I)

- Altura de cabeza o adendo,  $h_a$  : Distancia radial entre la circunferencia primitiva y la cabeza del diente
- Altura de pie o dedendo,  $h_f$  : Distancia radial entre la circunferencia primitiva y la raíz del diente
- Altura total,  $h$  : Suma de la altura de cabeza y la de pie  $h = h_a + h_f$
- Altura de trabajo,  $h_w$  : Diferencia entre la altura total del diente y el juego
- Holgura o juego circunferencial: Hueco circunferencial que resulta del acoplamiento de una pareja de dientes. Esta holgura es necesaria para permitir la deflexión de los dientes, el paso del lubricante y la expansión térmica.
- Huelgo o juego en cabeza,  $c$ : Espacio interdental, en dirección radial, formado en una pareja de dientes al engranar, entre la cabeza del diente de una rueda y el fondo del hueco de la rueda contraria. Suele valer:  $c = 0.25 \cdot m$

# Nomenclatura.

## Parámetros del dentado (II)

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

$$r_a = r + h_a$$

$$r_f = r - h_f$$

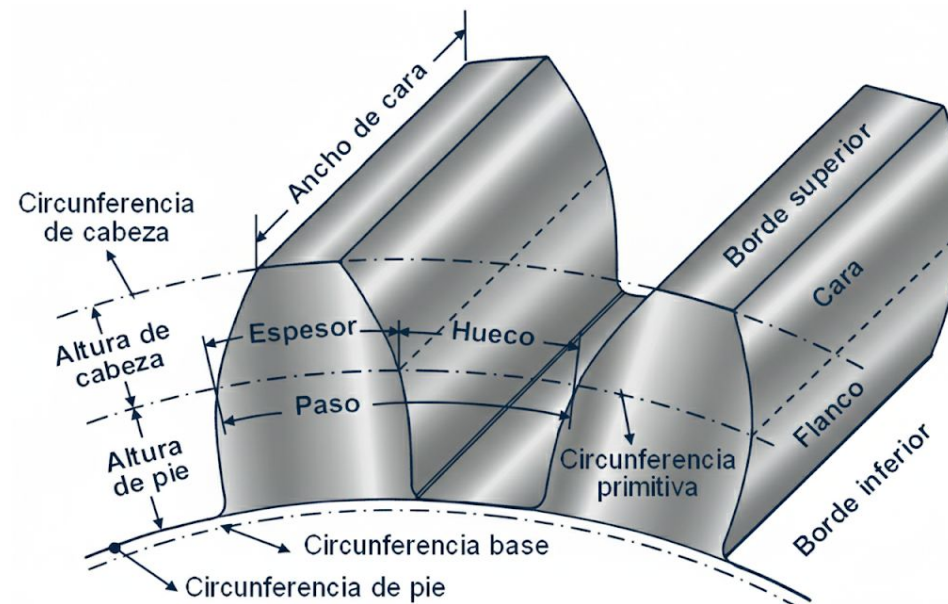


Imagen generada con Gemini

- Circunferencia de cabeza,  $r_a$ : circunferencia que limita los dientes por su parte superior.
- Circunferencia de pie,  $r_f$ : circunferencia que limita el hueco entre dientes por su parte inferior. El hueco debe ser suficientemente profundo para dejar pasar la cabeza de los dientes de la otra rueda.

# Nomenclatura.

## Parámetros del dentado (III)

- **Espesor,  $s$**  : Espesor del diente, medido sobre la circunferencia primitiva
- **Hueco,  $e$**  : Hueco entre dientes, medido sobre la circunferencia primitiva
- **El paso es igual al espesor más el hueco**  $p = e + s$
- **Cara**: Parte de la superficie del diente situada entre la circunferencia primitiva y la circunferencia de cabeza
- **Flanco**: Parte de la superficie del diente situada entre la circunferencia primitiva y la circunferencia de pie
- **Altura de flanco,  $b$**  : Anchura de los dientes medida en dirección longitudinal, paralela al eje.

$$s = \frac{\frac{2\pi r}{z}}{2} = \frac{\pi m}{2}$$

$$e = s = \frac{\pi m}{2}$$

# Perfil de referencia normalizado (I)

- Las dimensiones del perfil de referencia y de la herramienta asociada a él están normalizadas:

$$\left. \begin{array}{l} r_b = r \cdot \cos \alpha_0 \\ r_b = r \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_0 = \alpha$$

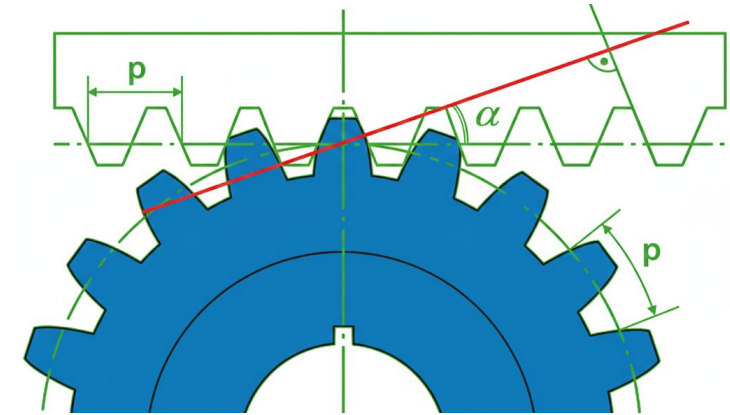
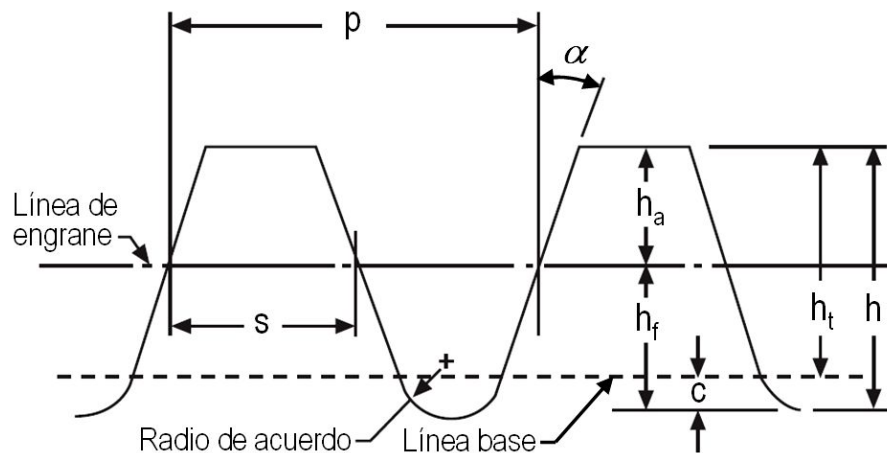


Imagen generada con Gemini



| PARÁMETRO                       | VALOR NORMALIZADO   |
|---------------------------------|---------------------|
| Ángulo de presión de referencia | $\alpha = 20^\circ$ |
| Addendum o altura de cabeza     | $h_a = m$           |
| Dedendum o altura de pie        | $h_f = m + c$       |
| Altura de trabajo               | $h_t = 2 \cdot m$   |
| Altura total del diente         | $h = 2 \cdot m + c$ |
| Huelgo o juego de cabeza        | $c = 0.25 \cdot m$  |
| Espesor del diente              | $s = \pi/2 \cdot m$ |
| Hueco interdental               | $e = \pi/2 \cdot m$ |

# Perfil de referencia normalizado (II)

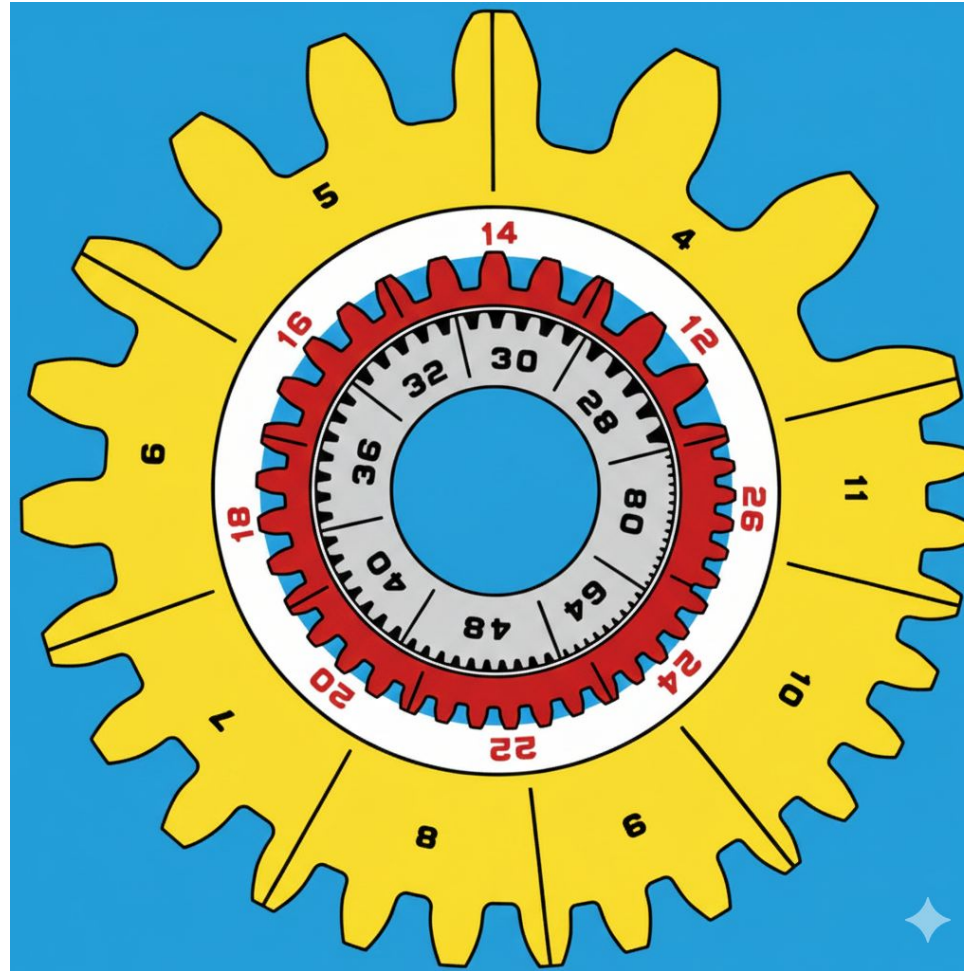


Imagen generada con Gemini

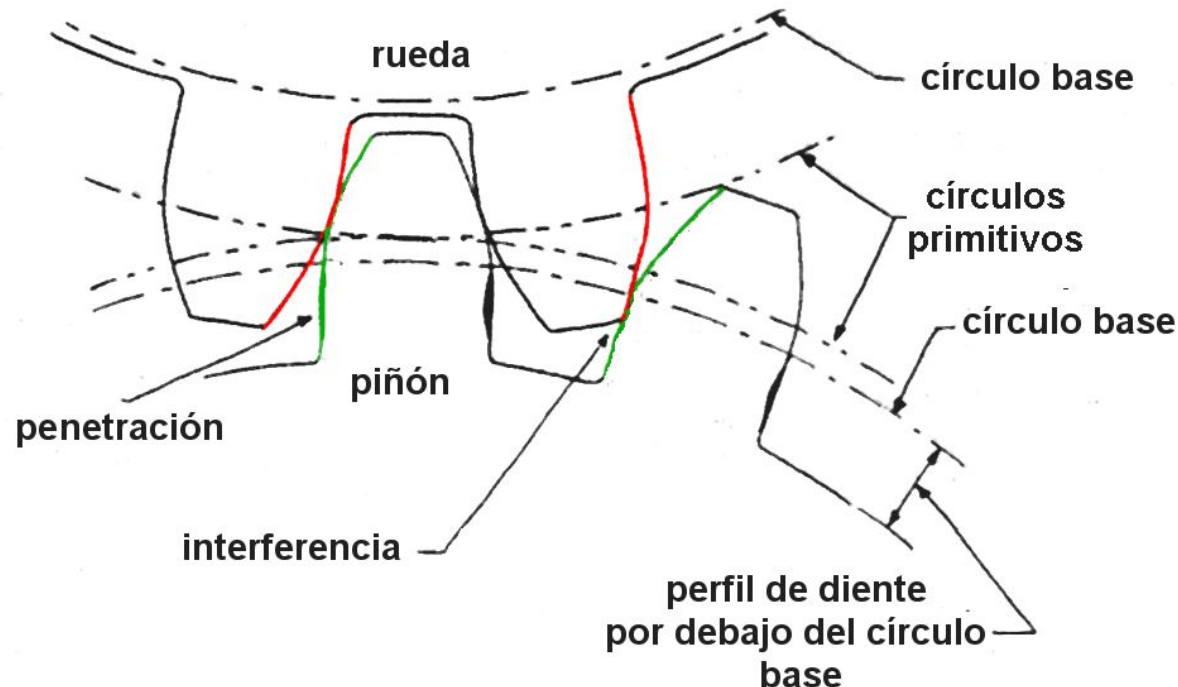
# Perfil de referencia normalizado (III)

- Las módulos normalizados más comunes, cuyos valores en mm. son:
  - De 1 a 4, aumentando en 0,25 mm.: 1 - 1,25 - 1,5 - .....3,75 - 4 mm.
  - De 4 a 7, aumentando en 0,5 mm.: 4 - 4,5 - 5 - .....7 mm.
  - De 7 a 14, aumentando en 1 mm.: 7 - 8 - 9 - .....14 mm.
  - De 14 a 20, aumentando en 2 mm.: 14 - 16 - 18 - .....20 mm.

| <b>MODULOS NORMALIZADOS</b> |      |     |    |     |    |
|-----------------------------|------|-----|----|-----|----|
| 1                           | 1.25 | 1.5 | 2  | 2.5 | 3  |
| 4                           | 5    | 6   | 8  | 10  | 12 |
| 16                          | 20   | 25  | 32 | 40  | 50 |

# Penetración e Interferencia en engranajes

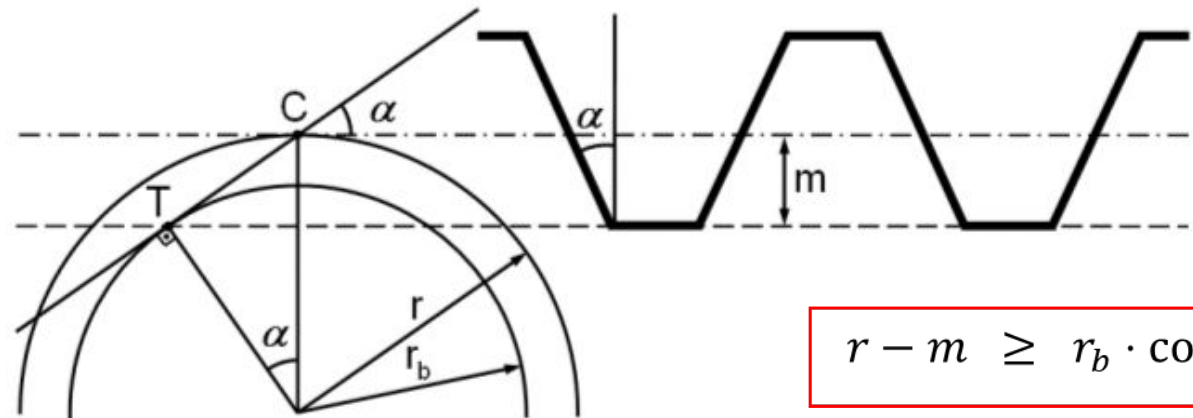
- La evolvente NO debe extenderse por debajo de la circunferencia base
- Si la herramienta penetra en el círculo básico  $\Rightarrow$  **PENETRACIÓN** del diente  $\Rightarrow$  Menor resistencia mecánica y menor vida a fatiga
- La porción de diente que queda por debajo NO tiene perfil de evolvente e interfiere con la cabeza del otro diente  $\Rightarrow$  **INTERFERENCIA** entre dientes



# Número límite de dientes (I)

- OBJETIVO: evitar la penetración
- Situación límite de penetración:
  - La cabeza de la herramienta sale tangencialmente al flanco que acaba de generar, y no lo daña.
  - El extremo del flanco de la herramienta NO debe sobrepasar el punto **T**, pues allí la velocidad relativa de la herramienta y el diente es tangente a ambos.

Si el extremo de la cremallera se extiende más allá del punto **T**, su velocidad no es tangente al flanco del diente y penetra en él.



$$r - m \geq r_b \cdot \cos \alpha$$

# Número límite de dientes (II)

- Condición para evitar la penetración:

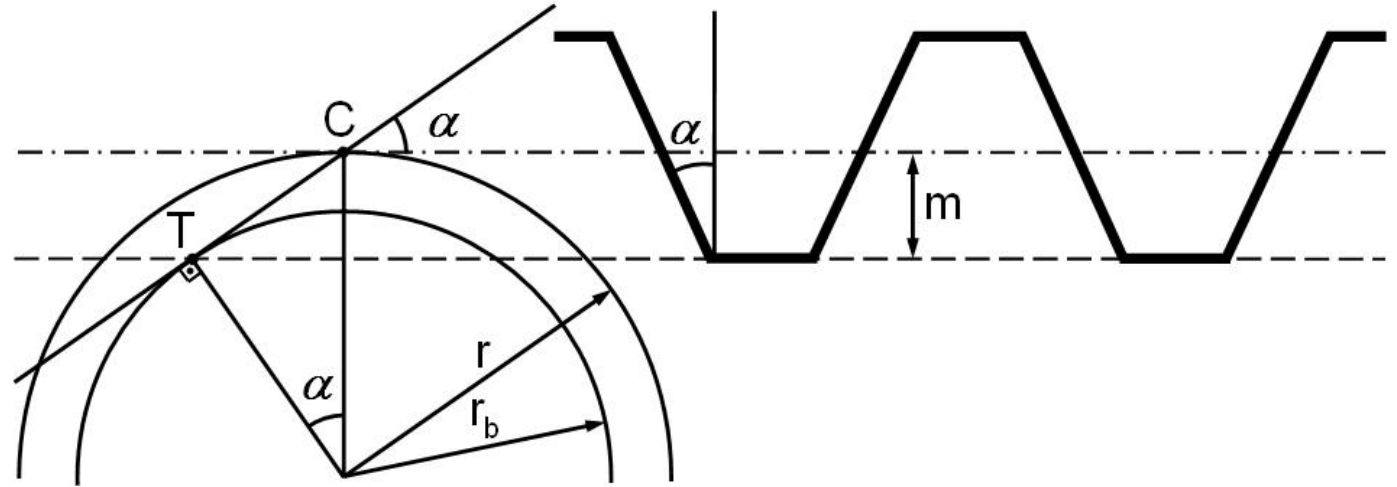
$$r - m \geq r_b \cdot \cos \alpha$$

- Como  $m = \frac{2r}{z}$  y  $r_b = r \cos \alpha$ :

$$r - \frac{2r}{z} \geq r \cos^2 \alpha \Rightarrow 1 - \frac{2}{z} \geq \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{2}{z} \leq 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{2}{z} \leq \sin^2 \alpha \Rightarrow z \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

- Para  $\alpha = 20^\circ$  normalizado:

$$z \geq \frac{2}{\sin^2 20^\circ} = 17,097 \Rightarrow z_{\text{lim}}$$



Si  $z > 14$ , la penetración es poco importante y, en la práctica, se admite:

$$z_{\text{lim}} = 14$$

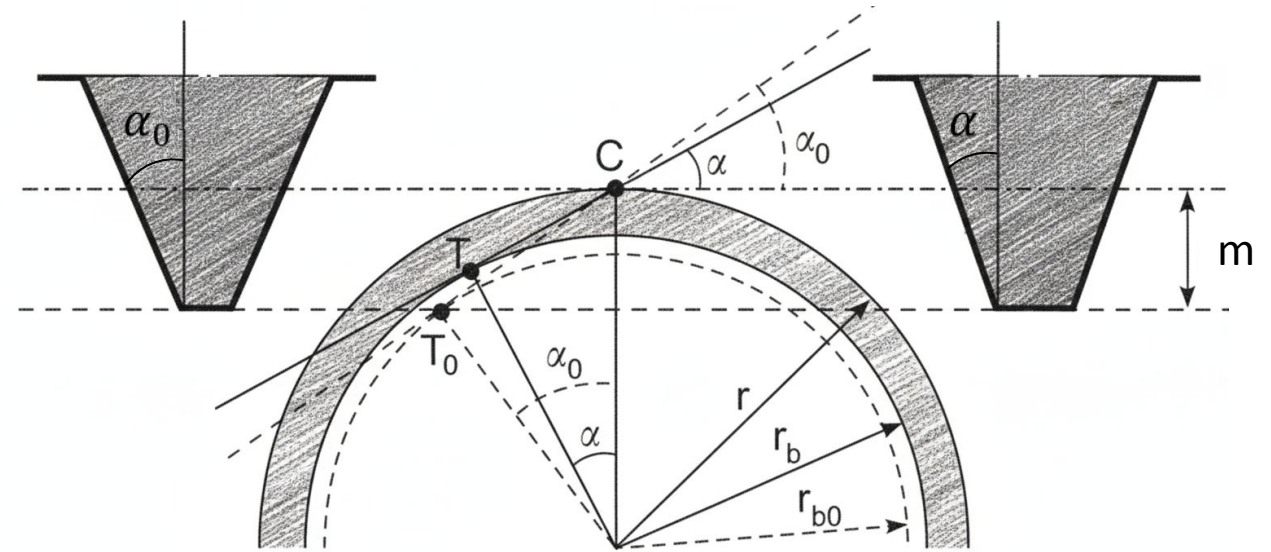
# Procedimientos de talla

- Procedimientos de talla para evitar la penetración en ruedas con menos de 14 dientes :
  - Variación del ángulo de inclinación del flanco de los dientes de la cremallera de talla.
  - Rebajado del dentado de la cremallera.
  - Desplazamiento de la herramienta en la talla.

# Variación del ángulo de presión

Variación del ángulo de inclinación del flanco de los dientes de la cremallera:

$$\alpha_0 > \alpha = 20^\circ$$



- Sigue siendo válida la expresión ante

$$z' \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha_0} \Rightarrow z'_1 = \frac{2}{\sin^2 \alpha_0} < \frac{2}{\sin^2 \alpha} = z_1 \Rightarrow z'_1 < z_1$$

La cremallera NO está normalizada

# Dentado rebajado

## Rebajado del dentado de la cremallera

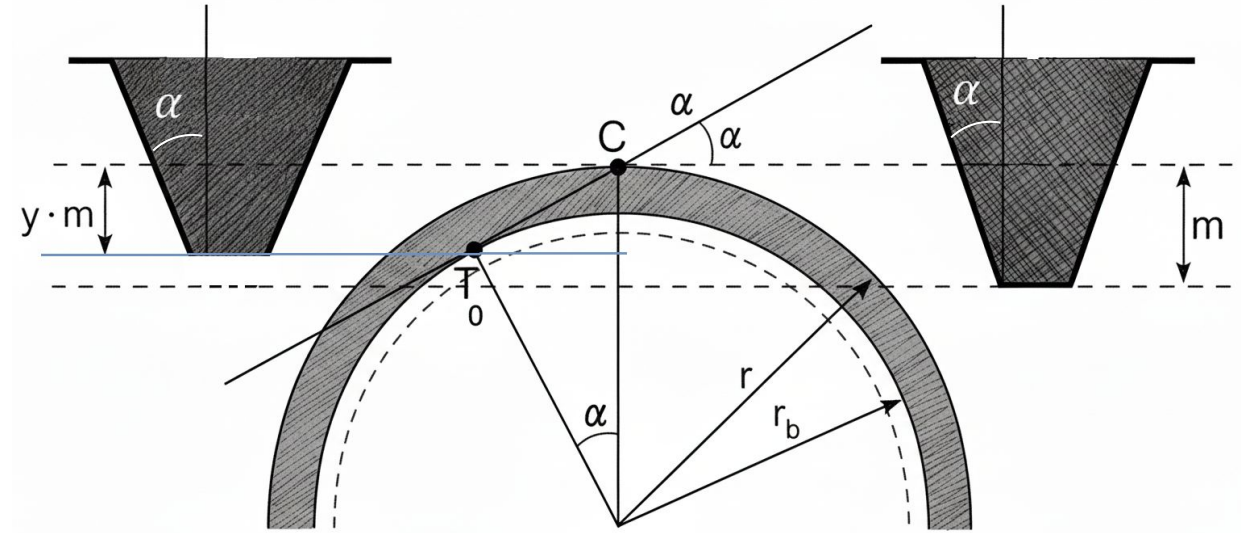
$$h_{ao} = my(y < 1)$$
$$r - my \geq r_b \cos \alpha$$

- Se emplea cremallera con alturas de pie de cabeza inferiores a las normalizadas

- Como  $m = \frac{2r}{z}$  y  $r_b = r \cos \alpha$ :

$$r - \frac{2r}{z'} y \geq r \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow 1 - \frac{2y}{z'} \geq \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{2y}{z'} \leq 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{2y}{z'} \leq \sin^2 \alpha \Rightarrow z' \geq \frac{2y}{\sin^2 \alpha}$$

- El número límite de dientes es:  $z'_1 = \frac{2y}{\sin^2 \alpha_0} < \frac{2}{\sin^2 \alpha} = z_1 \Rightarrow z'_1 < z_1$

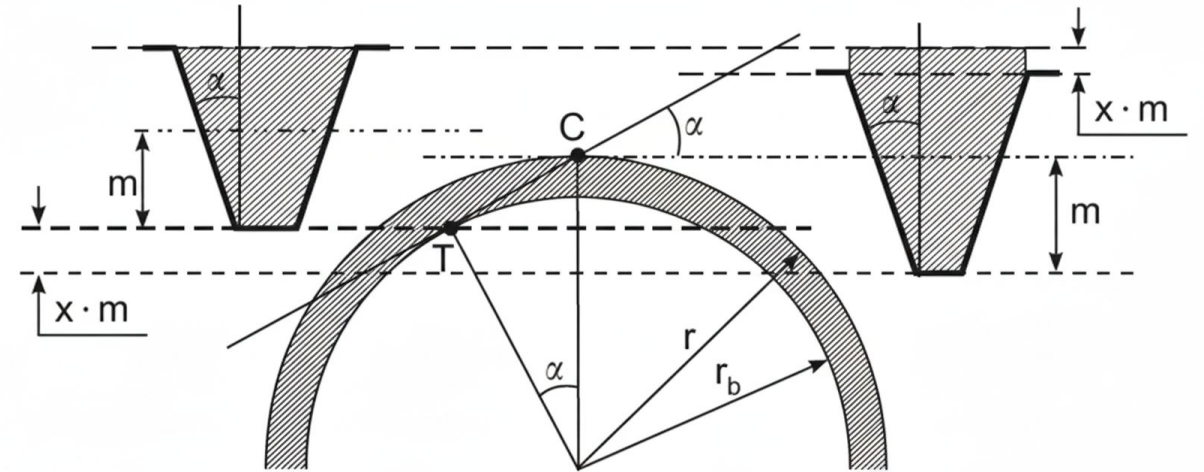


La cremallera NO está normalizada

# Desplazamiento de la talla

## Desplazamiento de la cremallera de talla

$$\begin{aligned} r + xm - m &\geq r_b \cos \alpha \\ r - (1 - x) \cdot m &\geq r_b \cos \alpha \end{aligned}$$



- La línea media de la herramienta se desplaza una cantidad “+  $x \cdot m$ ” hacia el exterior de la circunferencia primitiva (tallado en V) .

$$\begin{aligned} \bullet \quad Comom = \frac{2r}{z} \text{ y } r_b = r \cos \alpha &\Rightarrow r - \frac{2r}{z'}(1 - x) \geq r \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow \\ 1 - \frac{2(1 - x)}{z'} &\geq \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{2(1 - x)}{z'} \leq 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{2(1 - x)}{z'} \leq \sin^2 \alpha \Rightarrow z' \geq \frac{2(1 - x)}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

- Para poder cortar debe ser  $x < 1$  :  $z'_1 = \frac{2(1 - x)}{\sin^2 \alpha_0} < \frac{2}{\sin^2 \alpha} = z_1 \Rightarrow z'_1 < z_1$

La cremallera **SI** está normalizada

# Factor de desplazamiento en la talla

- El factor de desplazamiento a aplicar en la talla para corregir la posible penetración del diente será:

$$\begin{aligned} z'_1 &= \frac{2(1-x)}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \Rightarrow (1-x) = z'_1 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2} \Rightarrow \\ x &= 1 - \frac{z'_1}{\frac{2}{\operatorname{sen}^2 \alpha}} = 1 - \frac{z'_1}{z_1} = \frac{z_1 - z'_1}{z_1} \Rightarrow x = \frac{z_1 - z'_1}{z_1} \end{aligned}$$

- En la práctica, se trabaja con un número límite de dientes inferior al calculado teóricamente, y el factor de desplazamiento se calcula como:

$$x = \frac{14 - z'}{17}$$

# Tipos de talla

- Clasificación de las ruedas dentadas, atendiendo a la posición relativa de la herramienta de talla:
  - **RUEDAS TALLADAS a CERO** (rueda normalizada): La línea media de la herramienta o cremallera de talla es tangente a la circunferencia primitiva de referencia
  - **RUEDAS TALLADAS a V** (con desplazamiento): La línea media de la herramienta de talla NO es tangente a la circunferencia primitiva, está desplazada una cantidad  $V = m \cdot x$ 
    - Contada positivamente hacia el exterior (rueda V+)
    - O negativamente hacia el interior (rueda V-).

# Nomenclatura ruedas a V

- Las dimensiones de los dientes que resultan al desplazar la herramienta (cremallera) de talla de una forma normalizada son las siguientes:

- Altura de cabeza:  $h_a = (1 + x) \cdot m$

- Altura de pie:  $h_f = (1 - x) \cdot m + c$

- Espesor:  $s = \frac{m \cdot \pi}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha$

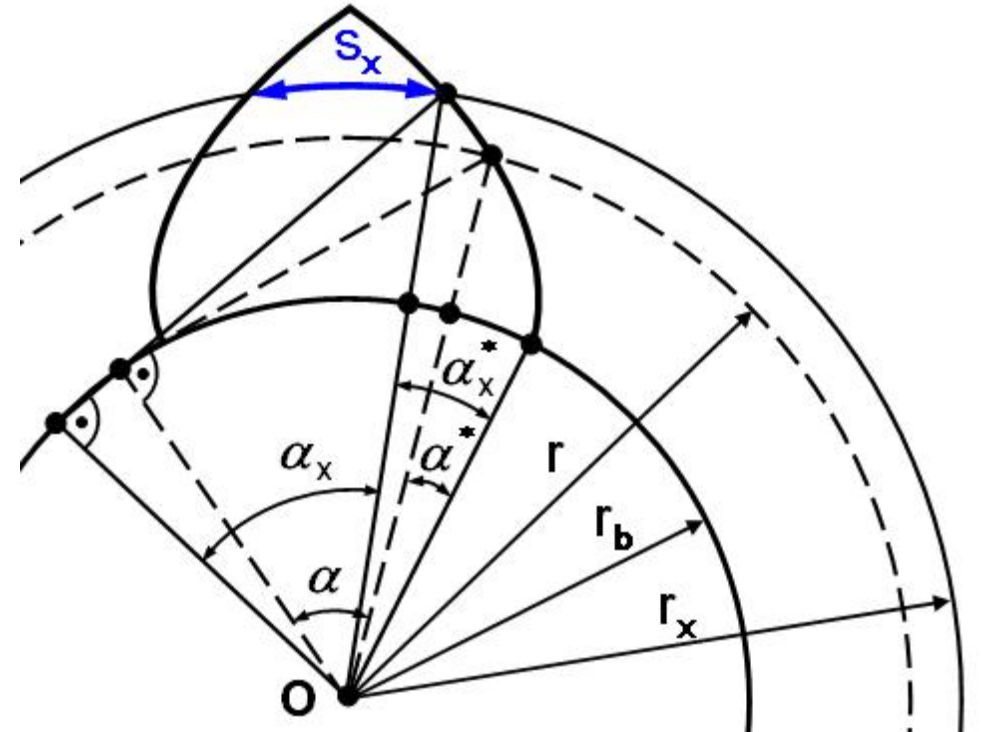
- Hueco:  $e = \frac{m \cdot \pi}{2} - 2 \cdot x \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha$

# Cálculo del espesor del diente (I)

$$s_x = 2 \cdot r_x \left[ \frac{\pi}{2 \cdot z} + \frac{2 \cdot x}{z} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha_x \right]$$

- $\alpha_x^*$  es la evolvente del ángulo  $\alpha_x$
- $\alpha^*$  es la evolvente del ángulo  $\alpha$
- Para engranajes normalizados,  $\alpha = 20^\circ$
- Para calcular el espesor del diente  $s_x$ , de un engranaje de  $z$  dientes, en una circunferencia de radio genérico  $r_x$ , se aprovechan las propiedades de la evolvente y, se toma como referencia el valor del espesor en la circunferencia primitiva (igual a la mitad del paso) □

$$s = \frac{\pi \cdot m}{2}$$



# Cálculo del espesor del diente (II)

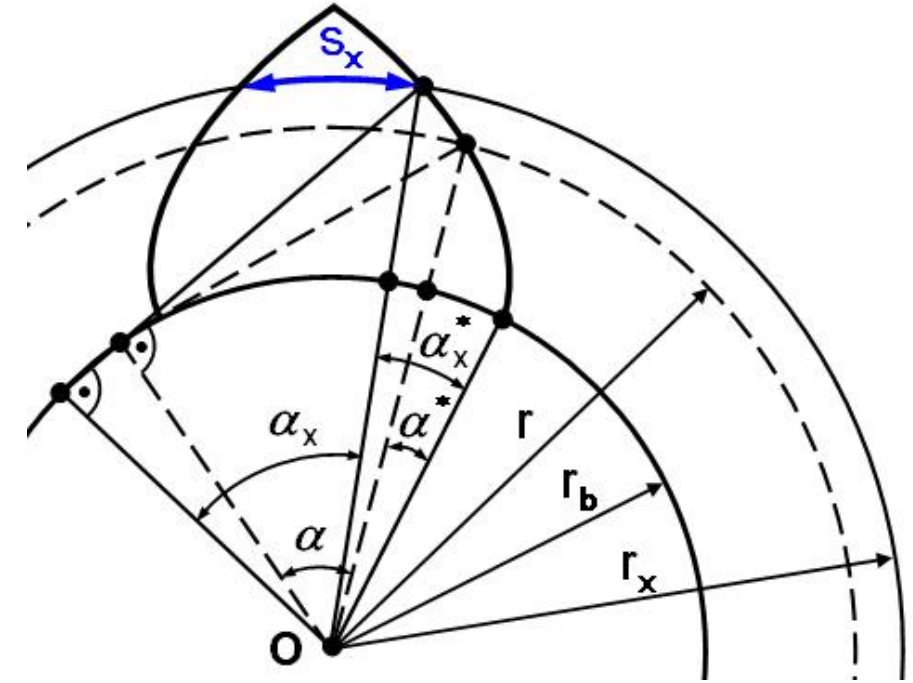
$$s_x = 2 \cdot r_x \left[ \frac{\pi}{2 \cdot z} + \frac{2 \cdot x}{z} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha_x \right]$$

$$s_x = 2 \cdot r_x \cdot \left[ \frac{\pi}{2 \cdot z} + \frac{2 \cdot x}{z} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha_x \right]$$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha = r_x \cdot \cos \alpha_x$$

$$r_x = r \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} = m \cdot z \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} \Rightarrow \alpha_x = \cos^{-1} \left( \frac{r_b}{r_x} \right)$$

$$s_x = m \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} \cdot \left[ \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha + z \cdot (\operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha_x) \right]$$



# Longitud de engrane

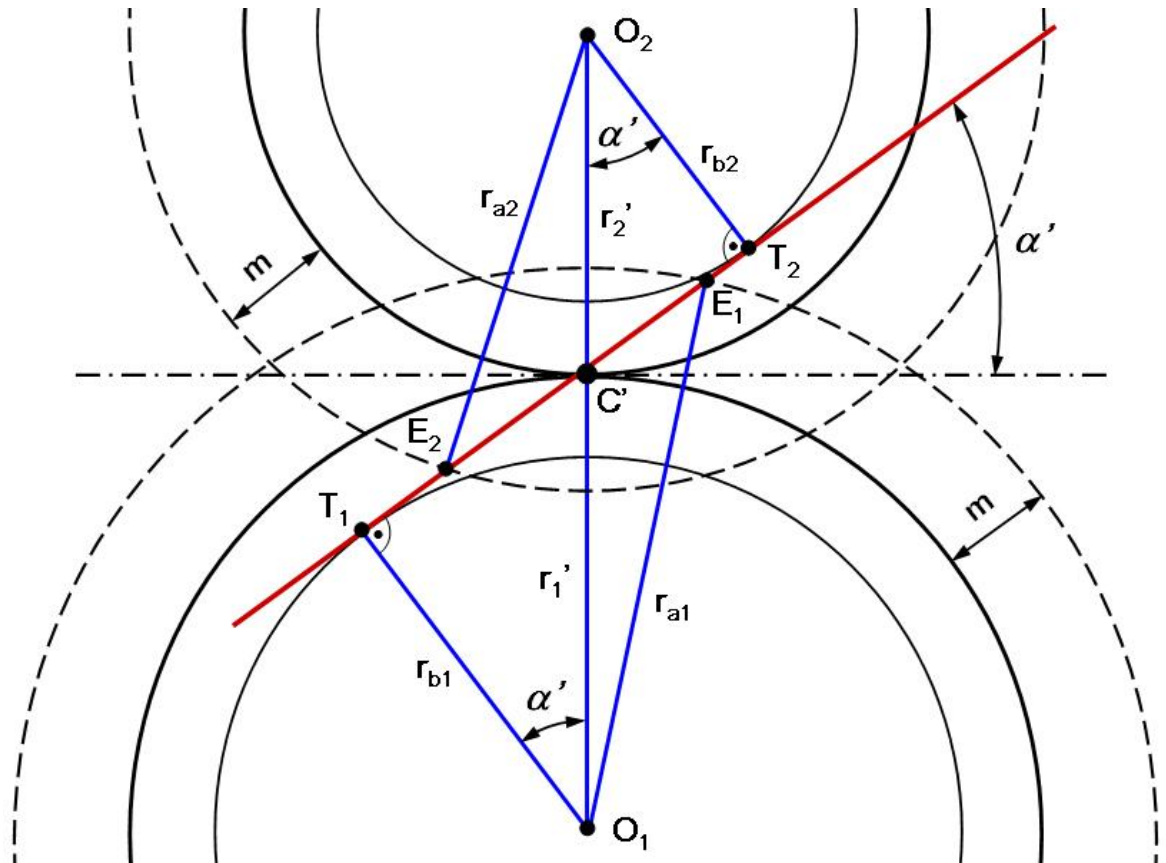
- La longitud o **segmento de engrane** se puede considerar como la suma de dos segmentos, unidos en el punto primitivo.

$$g_{\alpha} = g_f + g_a$$

Longitud de  
acercamiento o  
aproximación

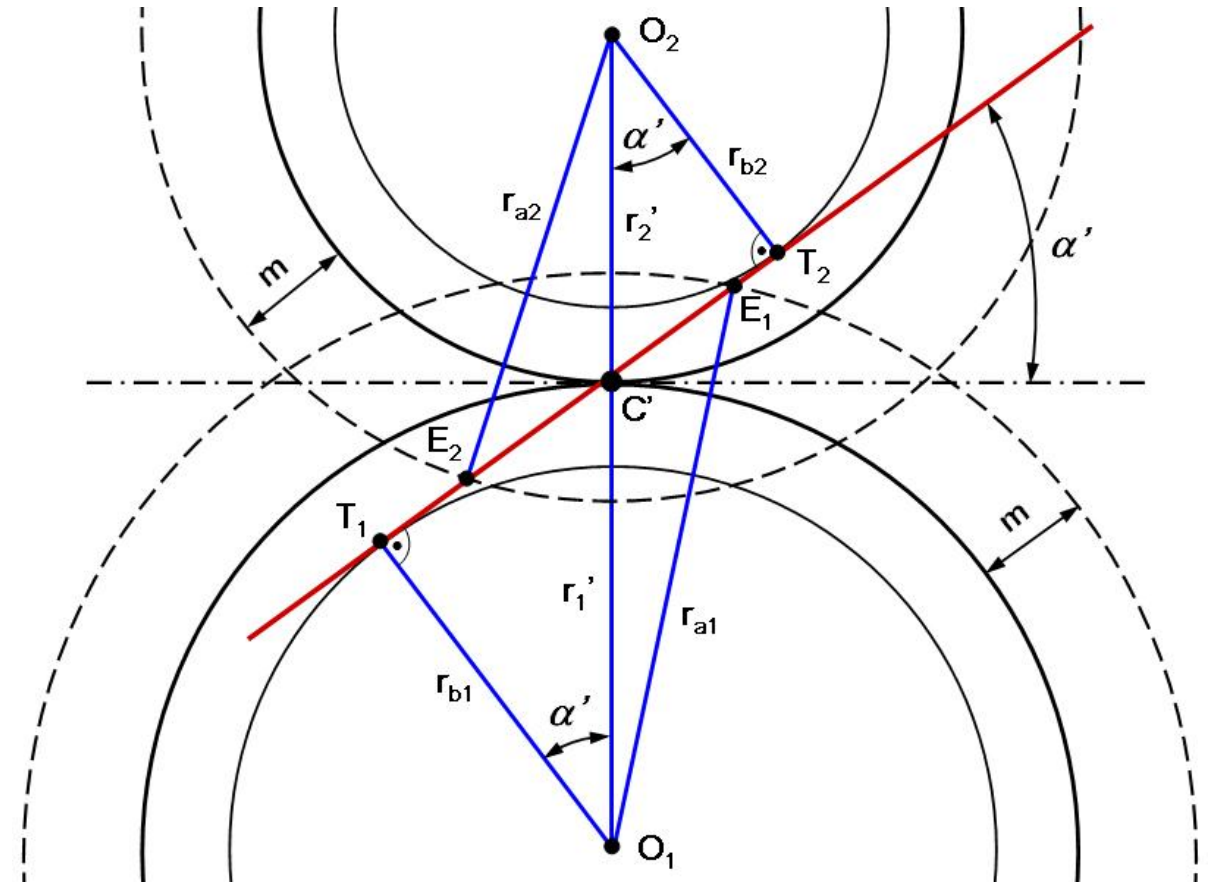
Longitud de  
alejamiento o  
retroceso

$$\overline{E_1 E_2} = \overline{E_2 C'} + \overline{C' E_1}$$



# Longitud de acercamiento

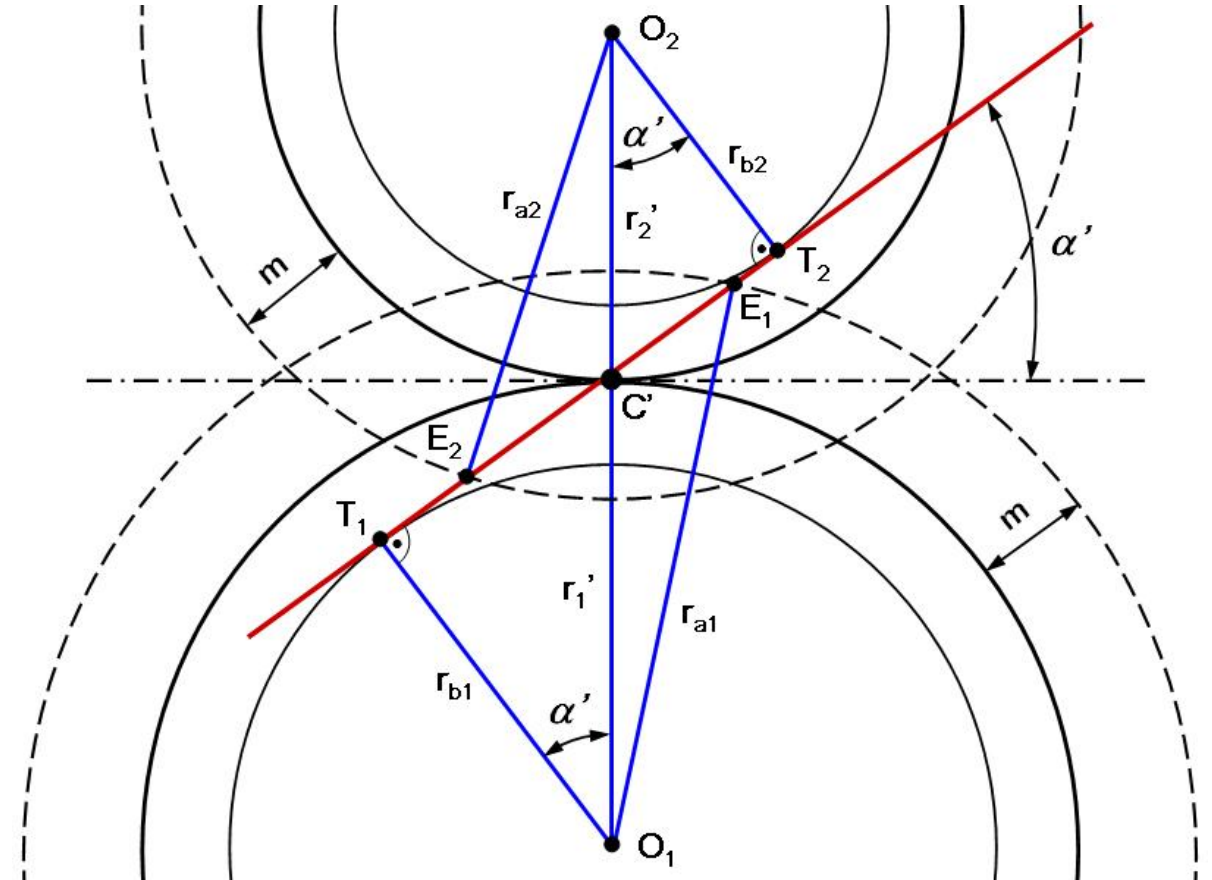
- **Longitud de acercamiento,  $g_f$ .**  
Distancia comprendida entre el primer punto de engrane,  $E_2$ , y el punto de rodadura,  $C'$ .
- El primer punto de contacto se produce en la 1ª intersección de las circunferencias de cabeza con la línea de engrane.



$$g_f = E_2C' = E_2T_2 - C'T_2 = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - r'_2 \text{sen}(\alpha')$$

# Longitud de alejamiento

- **Longitud de alejamiento,  $g_a$ .**  
Distancia comprendida entre el punto de rodadura,  $C'$  y el último punto de engrane,  $E_1$ .
- El último punto de contacto se produce en la 2ª intersección de las circunferencias de cabeza con la línea de engrane.

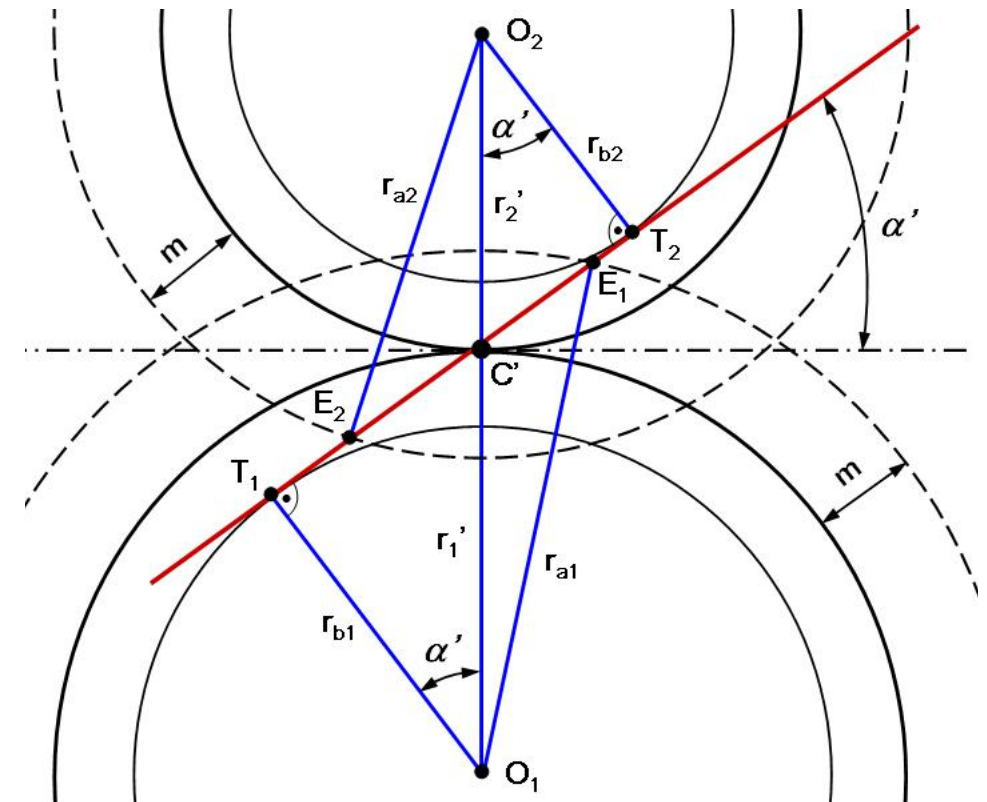


$$g_a = E_1 C' = E_1 T_1 - C' T_1 = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - r'_1 \sin(\alpha')$$

# Longitud de engrane. Arco de conducción

$$g_\alpha = \overline{E_2E_1} = \overline{E_2C'} + \overline{C'E_1} = g_f + g_a \quad \Rightarrow \quad g_\alpha = g_f + g_a$$

$$g_\alpha = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r'_1 + r'_2) \cdot \text{sen}\alpha'$$



# Grado de recubrimiento

- **Grado de recubrimiento,  $\varepsilon$**  : Es el cociente entre el arco de conducción y el paso
  - También llamado coeficiente de engrane o relación de contacto
- Dividiendo el arco de conducción y el paso sobre la circunferencia básica, resulta el cociente entre el segmento de engrane y el paso básico:

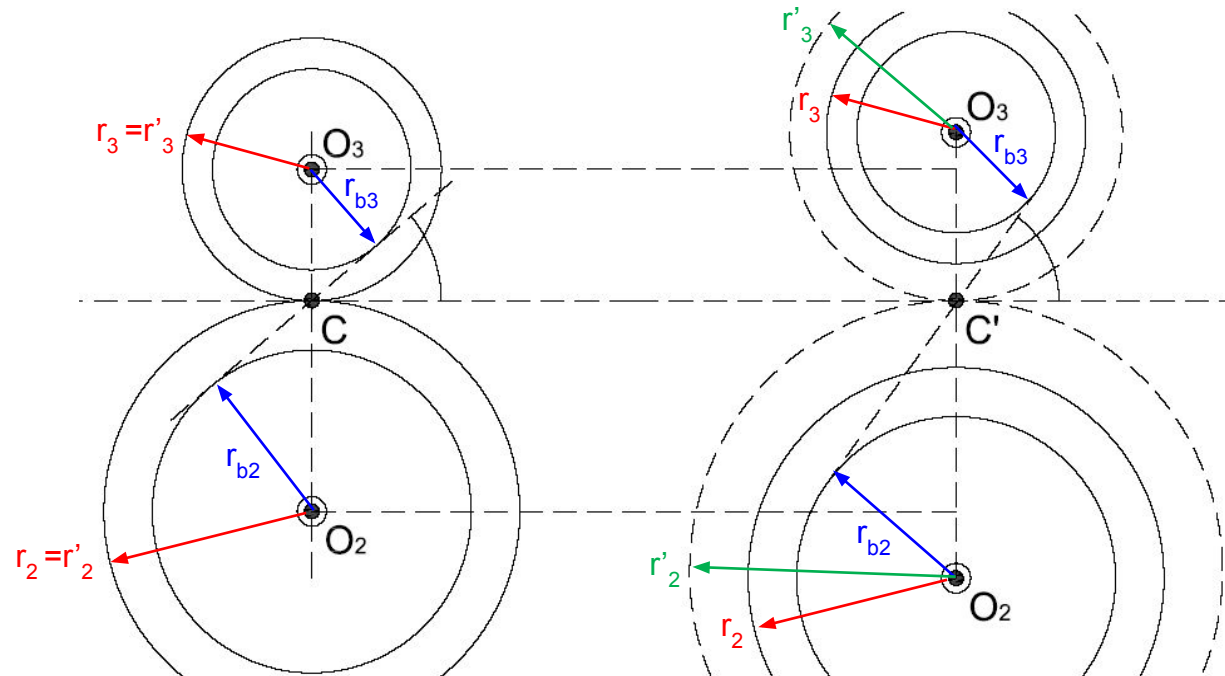
$$\varepsilon = \frac{\overline{E_2 E_1}}{P'} = \frac{\overline{E_2 E_1}}{m \pi \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}} = \frac{\overline{E_2 E_1}}{m \pi \cos \alpha} \quad \varepsilon = \frac{\overline{E_2 E_1}}{m \pi \cos \alpha} = \frac{g_\alpha}{m \pi \cos \alpha} \quad (\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r'_1 + r'_2) \cdot \sin \alpha'}{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha}$$

- La porción debida a la rueda 1 es:  $\varepsilon_1 = \frac{\overline{C'E_1}}{m \pi \cos(\alpha)} = \frac{g_a}{m \pi \cos \alpha}$
- La porción debida a la rueda 2 es:  $\varepsilon_2 = \frac{\overline{E_2 C'}}{m \pi \cos(\alpha)} = \frac{g_f}{m \pi \cos \alpha}$

# Montaje de engranajes (I)

- Atendiendo al tipo de montaje, podemos clasificar las ruedas dentadas como:
  - **ENGRANAJES MONTADOS a CERO.** Las circunferencias primitivas de funcionamiento coinciden con las de referencia
  - **ENGRANAJES MONTADOS en V.** Las circunferencias primitivas de funcionamiento NO coinciden con las circunferencias de referencia



# Montaje de engranajes (II)

## (a) Engranajes montados a cero con ruedas talladas a cero:

- Las dos ruedas tienen más de 14 dientes.

## (b) Engranajes montados a cero con ruedas talladas en V:

- Una rueda tiene más de 14 dientes, la otra menos y la suma es mayor de 28.
- Se tallan las ruedas con  $x_1 = -x_2$ .

## (c) Engranajes montados en V:

- Opción 1ª: Una rueda tiene más de 14 dientes, la otra menos y la suma es mayor de 28.
  - El piñón se talla en V y la rueda se talla a cero.
- Opción 2ª: Los dientes de ambas ruedas suman menos de 28.
  - Las ruedas menores de 14 dientes se tallan con su  $x$  particular y las de 14 o más se tallan a cero.

**Nota –** Válido para engranajes tallados con una herramienta normalizada de  $\alpha = 20^\circ$  (cremallera o fresa madre), sin penetración y montados de forma que no haya interferencia ni holgura circunferencial.

# Montaje de engranajes (III)

1. Las dos ruedas tienen 14 o más dientes.  $Z_1$  y  $Z_2 \geq 14$

**Las dos ruedas se tallan a cero y los engranajes son montados a cero**

2. Las dos ruedas tienen menos de 14 dientes.  $Z_1$  y  $Z_2 < 14$

**Las dos ruedas se tallan a +V, con su “x” particular, y los engranajes son montados en V**

3. El piñón es menor de 14 dientes y la rueda tiene 14 o más dientes.  $Z_1 < 14$  y  $Z_2 \geq 14$

**a)** Si se cumple que  $Z_1 + Z_2 \geq 28$ , dos opciones:

- El piñón se talla a +V, con su “ $x_1$ ”, y la rueda se talla a –V, con la misma “x” del piñón ( $x_2 = -x_1$ ) y los engranajes son montados a cero
- La rueda se talla a 0, el piñón a +V, con su “ $x_1$ ”, y los engranajes son montados en V

**b)** Si  $Z_1 + Z_2 < 28$

**La rueda se talla a 0, el piñón a +V, con su “ $x_1$ ”, y los engranajes son montados en V**

# Distancia entre ejes de funcionamiento (I)

- Distancia entre ejes de funcionamiento,  $a'$ :

- Suma de los radios primitivos de funcionamiento.

$$a' = r'_1 + r'_2$$

- Como:

$$\left. \begin{array}{l} r_b = r' \cdot \cos \alpha' \\ r_b = r \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \quad r' \cdot \cos \alpha' = r \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad r' = r \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

- Sustituyendo:

$$a' = (r_1 + r_2) \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

# Distancia entre ejes de funcionamiento (II)

## (a) Engranajes a cero:

$$\alpha' = \alpha \Rightarrow a_0 = r_1 + r_2$$

## (b) Engranajes en V sin holgura circunferencial:

- Sobre las circunferencias primitivas de funcionamiento:
  - *Suma del espesor de los dientes = paso*
  - Paso circunferencial sobre circunferencia primitiva de funcionamiento:

$$\left. \begin{array}{l} p' = \frac{2\pi r'}{z} \\ r' = r \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \end{array} \right\} \Rightarrow p' = \frac{2\pi}{z} \cdot r \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$
$$\text{comor} = \frac{mz}{2} : p' = \frac{2\pi}{z} \cdot \frac{mz}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

# Distancia entre ejes de funcionamiento (III)

## (b) Engranajes en V sin holgura circunferencial:

- Espesor de los dientes sobre la circunferencia primitiva de funcionamiento

$$\begin{aligned}s' &= 2 \cdot r' \cdot \left[ \frac{\pi}{2z} + \frac{2x}{z} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha' \right] \\ r' &= r \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{mz}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \Rightarrow s' = 2 \cdot \frac{mz}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot \left[ \frac{\pi}{2z} + \frac{2x}{z} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha' \right] = \\ &= m \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot \left[ \frac{\pi}{2} + 2x \cdot \operatorname{tg} \alpha + z \cdot (\operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha') \right] \\ \text{igualando } p' \text{ con } s'_1 + s'_2 \text{ queda:} \\ m\pi \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} &= m \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot \left[ \frac{\pi}{2} + 2(x_1 + x_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha + (z_1 + z_2) \cdot (\operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha') \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(x_1 + x_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha' + (z_1 + z_2) \cdot (\operatorname{Ev} \alpha - \operatorname{Ev} \alpha') &= 0 \Rightarrow \\ \operatorname{Ev} \alpha' &= 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Ev} \alpha \rightarrow \alpha' \rightarrow \alpha'\end{aligned}$$

# Distancia entre ejes de funcionamiento (IV)

## (c) Engranajes en V sin holgura radial:

- La línea media de la cremallera de referencia de la rueda 1 coincide con la de la 2

$$a' = (r_1 + mx_1) + (r_2 + mx_2) = r_1 + r_2 + (x_1 + x_2) \cdot m$$

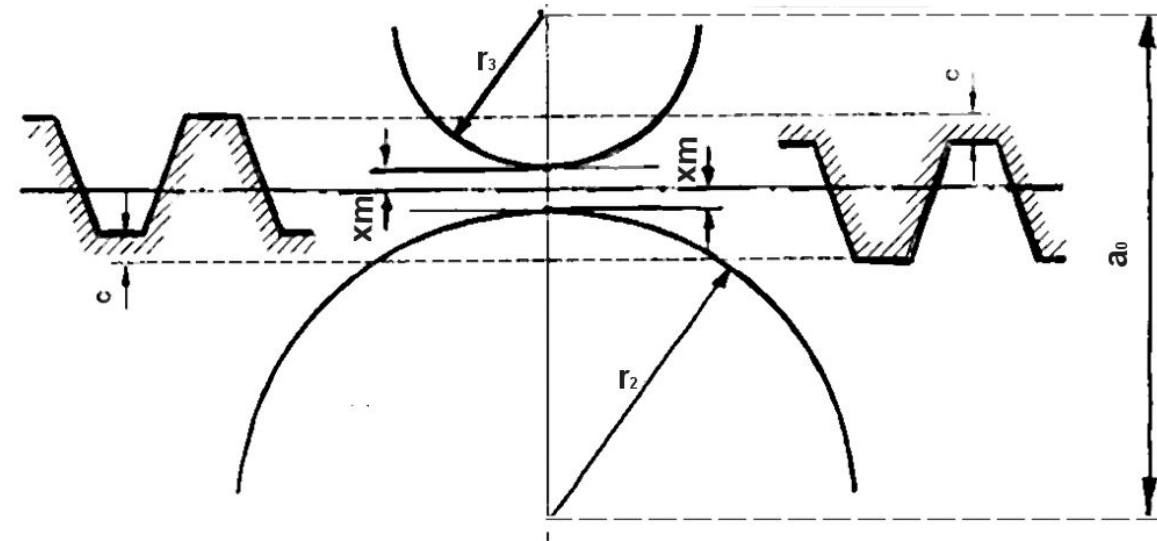
- Multiplicando y dividiendo por  $\square \quad 2(z_1 + z_2)$

$$a_0 = r_1 + r_2 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \frac{m}{2} \cdot (z_1 + z_2)$$

- Como  $\square \quad m = \frac{2r}{z}$

$$\frac{mz}{2} = r \Rightarrow \frac{m}{2} \cdot (z_1 + z_2) = r_1 + r_2 \Rightarrow a_0 = (r_1 + r_2) + 2 \cdot (r_1 + r_2) \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \Rightarrow$$

$$a' = (r_1 + r_2) \left[ 1 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \right]$$



# Créditos imágenes

---

Pág. 4: Imágenes generadas con Gemini 2.5

Pág. 8: Imagen generada con Gemini 2.5

Pág. 9: Imágenes generadas con Gemini 2.5

Pág. 10: Imágenes generadas con Gemini 2.5

Pág. 11: Imágenes generadas con Gemini 2.5

Pág. 12: Imagen adaptada por Gemini 2.5

Pág. 22: Imágenes generadas con Gemini 2.5

Pág. 28: Imágenes generadas con Gemini 2.5

Pág. 32: Imagen generada con Gemini 2.5

Pág. 35: Imagen generada con Gemini 2.5

Pág. 37: Imagen generada con Gemini 2.5

Pág. 38: Imagen generada con Gemini 2.5