

OpenCourseWare

TEORÍA DE MÁQUINAS

CRISTINA CASTEJÓN SISAMÓN

EDUARDO CORRAL ABAD

RAÚL GISMEROS MORENO

MARIA JESÚS GÓMEZ GARCÍA

JESÚS MENESES ALONSO

HIGINIO RUBIO ALONSO

ABRAHAM VADILLO MORILLAS

Ejercicios de engranajes



1. Determinar las dimensiones de los parámetros de dos engranajes tallados con un ángulo de presión de referencia normalizado $\alpha = 20^\circ$, si el piñón tiene 18 dientes, el módulo es $m = 5$ y la relación de transmisión es $i = 3/7$.

Solución:

$$i = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z_2 = \frac{z_1}{i} \Rightarrow z_2 = \frac{18}{3/7} = 42 \text{ dientes}$$

$$m_1 = m_2 = m = 5 \text{ mm.}$$

$$r = \frac{m \cdot z}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{m \cdot z_1}{2} = \frac{5 \cdot 18}{2} = 45 \text{ mm.} \Rightarrow r_2 = \frac{m \cdot z_2}{2} = \frac{5 \cdot 42}{2} = 105 \text{ mm.}$$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

$$r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha = 45 \cdot \cos 20^\circ = 42.29 \text{ mm.} \Rightarrow r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha = 105 \cdot \cos 20^\circ = 98.67 \text{ mm.}$$

$$h_{a1} = h_{a2} = m = 5 \text{ mm.}$$

$$r_a = r + h_a = r + m$$

$$r_{a1} = r_1 + m = 45 + 5 = 50 \text{ mm.} \Rightarrow r_{a2} = r_2 + m = 105 + 5 = 110 \text{ mm.}$$

$$c_1 = c_2 = 0.25 \cdot m = 1.25 \text{ mm.}$$

$$h_{f1} = h_{f2} = m + c = m + 0.25 \cdot m = 1.25 \cdot m = 1.25 \cdot 5 = 6.25 \text{ mm.}$$

$$r_f = r - h_f = r - (1.25 \cdot m)$$

$$r_{f1} = r_1 - 1.25 \cdot m = 45 - 1.25 \cdot 5 = 38.75 \text{ mm.} \Rightarrow r_{f2} = r_2 - 1.25 \cdot m = 105 - 1.25 \cdot 5 = 98.75 \text{ mm.}$$

$$h = h_a + h_f = m + (m + 0.25 \cdot m) = 2.25 \cdot m \Rightarrow h_1 = h_2 = 2.25 \cdot m = 2.25 \cdot 5 = 11.25 \text{ mm.}$$

$$h_{t1} = h_{t2} = 2 \cdot m = 2 \cdot 5 = 10 \text{ mm.}$$

$$p = p_1 = p_2 = \pi \cdot m = 15.70 \text{ mm.}$$

$$s = e = \frac{p}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2}$$

$$s_1 = s_2 = \frac{\pi \cdot m}{2} = \frac{\pi \cdot 5}{2} = 7.85 \text{ mm.}$$

$$e_1 = e_2 = \frac{\pi \cdot m}{2} = \frac{\pi \cdot 5}{2} = 7.85 \text{ mm.}$$

$$a = r_1 + r_2 = 45 + 105 = 150 \text{ mm.}$$

2. Sea un engranaje formado por dos ruedas dentadas de $Z_1 = 19$ y $Z_2 = 59$ dientes respectivamente, fabricadas con módulo 4, y con ángulo de presión de referencia normalizado 20 grados. Determinar los parámetros característicos de cada rueda.

Solución:

Altura de cabeza $h_{c1} = h_{c2} = 4 \text{ mm}$

Altura de pie $hf_1 = hf_2 = 5\text{mm}$

Altura total $h_1 = h_2 = 9\text{mm}$

Radio primitivo $r_1 = 38\text{mm}$ $r_2 = 118\text{mm}$

Radio de cabeza $ra_1 = 42\text{mm}$ $ra_2 = 122\text{mm}$

Radio de pie $rf_1 = 33\text{mm}$ $rf_2 = 113\text{mm}$

Radio base $rb_1 = 35,7\text{mm}$ $rb_2 = 110,88\text{mm}$

Paso angular $pa_1 = 18,94^\circ$ $pa_2 = 6,1^\circ$

paso $p_1 = p_2 = 12,56\text{mm}$

espesor del diente $e_1 = e_2 = 6,28\text{mm}$

Relación de transmisión $i = 0,32$

3. Un engranaje cilíndrico recto con módulo $m = 4$, tiene una relación de transmisión $i = 2/3$ con un número de dientes $z_1 = 20$ en el piñón. Tras un cierto periodo de funcionamiento, se observa rotura y desgaste prematuro en una de las ruedas, por lo cual se debe rediseñar el conjunto respetando la misma distancia entre ejes, pero aumentando el módulo a $m = 5$. Se pide calcular los números de dientes de las dos ruedas una vez rediseñado el engrane con $m=5$.

Solución:

$m = 5$, distancia entre ejes $O_1O_2 = 100$, $i = 2/3$, $z_1 = 16$, $z_2 = 24$

4. Determinar el espesor de un diente ($m = 5$, $z = 10$) en el radio de cabeza si se talla de manera que se evite la penetración utilizando herramientas de talla normalizadas (con un ángulo de presión $\alpha = 20^\circ$).

Solución: $S_a = 2,09\text{mm}$

5. Un engranaje cilíndrico recto está formado por dos ruedas dentadas de $Z_1 = 9$ y $Z_2 = 13$ dientes, construidas con módulo 3. Calcular el ángulo de presión, α' , así como la distancia entre centros de ejes y los radios primitivos en un montaje sin holgura circunferencial.

Solución $\alpha' = 24^\circ 5' 11''$, distancia entre ejes $a_0 = 33,967\text{mm}$, radios primitivos $r_1 = 13,896\text{mm}$ $r_2 = 20,072\text{mm}$

6. Discutir, para obtener la reducción 13/15 entre dos ejes paralelos, la talla y montaje correspondiente siendo el piñón de 13 dientes y módulo 5. Calcular los parámetros de talla y montaje:

Para cada rueda:

- Número de dientes
- Módulo
- Radio primitivo de referencia
- Radio primitivo de funcionamiento
- Radio base
- Radio de cabeza
- Radio de pie
- Ángulo de presión de referencia
- Paso
- Espesor
- Hueco
- Factor de desplazamiento (x1, x2)
- Desplazamiento de la cremallera en la talla a V
- Para la pareja de ruedas dentadas:
- Ángulo de presión de funcionamiento
- Distancia entre ejes de funcionamiento

Solución:

Parámetro	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	13	15
Factor de desplazamiento (x)	0.0588	-0.0588
desplazamiento (x·m) (mm)	0.2941	-0.2941
Radio primitivo de referencia(r) (mm)	32.5	37.5
Radio base (rb) (mm)	30.540	35.238
Radio primitivo de trabajo (r') (mm)	32.5	37.5
Radio de cabeza (ra) (mm)	37.794	42.205
Radio de pie (rf) (mm)	26.544	30.955
Hueco (e) (mm)	7.639	8.068
Espesor (s) (mm)	8.068	7.639
Angulo de presión de trabajo (α') (°)	20	
Distancia entre ejes de funcionamiento (a') (mm)	70	

7. Determinar la altura de cabeza de los dientes de un engranaje de Z =10 dientes y módulo m = 8, para asegurar que no haya penetración durante la talla.

Solución:

Al disponerse de un engranaje con un número de dientes Z = 10, para evitar la penetración durante la talla se deben tallar en V, con un factor de desplazamiento x igual a:

$$x = \frac{14 - Z}{17} \Rightarrow x = \frac{14 - 10}{17} = \frac{4}{17} = 0.2353$$

Al ser el módulo m = 8 mm, el desplazamiento aplicado a la cremallera la talla, respecto a la posición de referencia será:

$$m \cdot x = 8 \cdot 0.2353 = 1.8824 \text{ mm.}$$

Y la altura de cabeza:

$$h_a = (1 + x) \cdot m \quad \Rightarrow \quad h_a = (1 + 0.2353) \cdot 8 = 9.88 \text{ mm.}$$

8. Calcular los parámetros de un engranaje de $Z_1 = 13$ dientes y modulo $m = 5$, si ha sido tallado con una cremallera normalizada (con un ángulo de inclinación del flanco de 20°) desplazada de su posición de referencia 1.5 mm.

Solución:

El engranaje se talla con un desplazamiento positivo igual a:

$$m \cdot x = 1.5 \text{ mm.}$$

Luego el factor de desplazamiento del engranaje será:

$$x = \frac{1.5}{m} = \frac{1.5}{5} = 0.3$$

El radio primitivo de referencia será:

$$r = \frac{m \cdot z}{2} = \frac{5 \cdot 13}{2} = 32.5 \text{ mm.}$$

El radio base:

$$r_b = r \cdot \cos \alpha = 32.5 \cdot \cos 20^\circ = 30.54 \text{ mm.}$$

Siendo el juego de cabeza igual a:

$$c = 0.25 \cdot m = 0.25 \cdot 5 = 1.25 \text{ mm.}$$

Las alturas de cabeza y de pie del engranaje tallado con desplazamiento son:

$$h_a = (1 + x) \cdot m = (1 + 0.3) \cdot 5 = 6.5 \text{ mm.}$$

$$h_f = (1 + c - x) \cdot m = (1 + 0.25 - 0.3) \cdot 5 = 4.75 \text{ mm.}$$

Luego, la altura total del diente será:

$$h = h_a + h_f = [(1 + x) \cdot m] + [(1 + c - x) \cdot m] = (2 + c) \cdot m = 2.25 \cdot 5 = 11.25 \text{ mm.}$$

Los radios de la circunferencia de cabeza y de pie serán:

$$r_a = r + h_a = 32.5 + 6.5 = 39 \text{ mm.}$$

$$r_f = r - h_f = 32.5 - 4.75 = 27.75 \text{ mm.}$$

El pasó será:

$$p = \pi \cdot m = \pi \cdot 5 = 15.708 \text{ mm.}$$

Cuando los engranajes se tallan con desplazamiento con una herramienta normalizada, el espesor del diente (en la circunferencia primitiva de referencia) puede calcularse como:

$$s = \frac{m \cdot \pi}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad s = \frac{5 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot 0.3 \cdot 5 \cdot 20^\circ = 8.946 \text{ mm.}$$

Y el hueco de un diente como:

$$e = \frac{m \cdot \pi}{2} - 2 \cdot x \cdot m \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad s = \frac{5 \cdot \pi}{2} - 2 \cdot 0.3 \cdot 5 \cdot 20^\circ = 6.762 \text{ mm.}$$

9. Determinar las dimensiones de los parámetros de dos engranajes, cuyo piñón tiene $Z_1 = 10$ dientes y la rueda $Z_2 = 35$ dientes, si han sido montados a cero y sin holgura circunferencial y tallados con una cremallera normalizada (con un ángulo de inclinación del flanco $\alpha = 20^\circ$) y el modulo es $m = 6$. ¿Qué parámetros presentarían los engranajes y cual sería las distancias entre ejes, si se desea conservar la holgura circunferencial nula pero la rueda de $Z_2 = 35$ dientes se tallara sin desplazamiento?

Solución:

la rueda tiene más de 14 dientes y el piñón menos de 14 dientes y la suma de los dientes de los dos engranajes presentan más de 28 dientes. Se podría resolver de dos formas, pero el enunciado nos comenta que la rueda se talle sin desplazamiento.

$$r = \frac{m \cdot z}{2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{m \cdot z_2}{2} = \frac{6 \cdot 35}{2} = 105 \text{ mm.}$$

$$r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha = 105 \cdot \cos 20^\circ = 98.67 \text{ mm.}$$

$$h_a = m$$

$$h_f = (1 + c) \cdot m = 1.25 \cdot m$$

$$r_{a2} = r_2 + h_a = r_2 + m = 105 + 6 = 111 \text{ mm.}$$

$$r_{f2} = r_2 - h_f = r_2 - 1.25 \cdot m = 105 - 1.25 \cdot 6 = 97.5 \text{ mm.}$$

$$p = p_1 = p_2 = \pi \cdot m = 18.85 \text{ mm.}$$

$$s = e = \frac{m \cdot \pi}{2} \quad \Rightarrow \quad s_2 = e_2 = \frac{6 \cdot \pi}{2} = 9.425 \text{ mm.}$$

$$Ev\alpha' = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \alpha + Ev\alpha$$

$$Ev\alpha' = 2 \cdot \frac{0.2353 + 0}{10 + 35} \cdot 20^\circ + Ev20^\circ = 0.018710$$

la evolvente del valor 0.018710 se corresponde con un ángulo de contacto en funcionamiento: $\alpha' \approx 21.5^\circ$.

Por esto, los radios primitivos de funcionamiento serán:

$$r_1' = r_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 30 \cdot \frac{\cos 20^\circ}{\cos 21.5^\circ} = 30.30 \text{ mm.}$$

$$r_2' = r_2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 105 \cdot \frac{\cos 20^\circ}{\cos 21.5^\circ} = 106.05 \text{ mm.}$$

Y la distancia entre ejes sería igual a la suma de los radios primitivos de funcionamiento:

$$a' = r_1' + r_2' = 30.30 + 106.5 = 136.35 \text{ mm.}$$

Parámetro del engranaje	Piñón	Rueda
Número de dientes (z)	10	35
Coefficiente de desplazamiento (x)	0.2353	0
Desplazamiento en la talla (x·m) (mm)	1.41	0
Módulo (m) (mm)	6	6
Ángulo de presión de referencia (α) (°)	20	20
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	30	105
Radio primitivo de funcionamiento (r) (mm)	30.30	106.05
Radio base (r _b) (mm)	28.19	98.67
Radio de cabeza (r _a) (mm)	37.41	111
Radio de pie (r _f) (mm)	23.91	97.5
Paso (p) (mm)	18.85	18.85
Hueco (e) (mm)	8.40	9.425
Espesor (s) (mm)	10.45	9.425
Huelgo de referencia(c) (mm)	1.5	1.5
Ángulo de presión en el montaje (α) (°)	21.5°	
Distancia entre ejes de funcionamiento (a') (mm)	136.05	

10. Calcular el valor de los parámetros de dos engranajes, cuyo modulo es $m = 8$, el piñón presenta $Z_1 = 8$ dientes y la rueda $Z_2 = 11$ dientes, si son tallados con una cremallera normalizada (con un ángulo de inclinación del flanco de 20°) y montados de manera que no exista holgura circunferencial. Determinar también, una vez realizado el montaje, cuál sería la holgura radial (o juego en funcionamiento) resultante.

Solución

En este caso se tiene un engrane cuyos dos engranajes presentan menos de 14 dientes, luego la solución más común (y normalizada) sería realizar un montaje en V y un tallado del piñón con desplazamiento " $m \cdot x_1$ " y de la rueda " $m \cdot x_2$ ", donde los coeficientes de desplazamiento serían:

$$x_1 = \frac{14 - z_1}{17} = \frac{14 - 8}{17} = 0.353$$

$$x_2 = \frac{14 - z_2}{17} = \frac{14 - 11}{17} = 0.176$$

El piñón de 8 dientes se talla con un desplazamiento positivo igual a:

$$m \cdot x_1 = 8 \cdot 0.353 = 2.824 \text{ mm.}$$

Y la rueda de 11 dientes se talla con desplazamiento positivo igual a:

$$m \cdot x_2 = 8 \cdot 0.176 = 1.408 \text{ mm.}$$

Los radios primitivos de referencia serán:

$$r = \frac{m \cdot z}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{m \cdot z_1}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32 \text{ mm.} \Rightarrow r_2 = \frac{m \cdot z_2}{2} = \frac{8 \cdot 11}{2} = 44 \text{ mm.}$$

Y los radios base:

$$r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha = 32 \cdot \cos 20^\circ = 30.07 \text{ mm.} \Rightarrow r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha = 44 \cdot \cos 20^\circ = 41.35 \text{ mm.}$$

La altura de cabeza y de pie de los engranajes tallados con desplazamiento ven aumentados o disminuidos sus valores, con respecto a los valores de referencia, la cuantía del desplazamiento:

$$h_a = (1 + x) \cdot m \text{ y } h_f = (1 + 0.25 - x) \cdot m$$

Siendo el huelgo o juego de cabeza de referencia será: $c_1 = c_2 = 0.25 \cdot m = 0.25 \cdot 8 = 2 \text{ mm.}$

Pero la altura total del diente sigue siendo la misma que la de referencia:

$$h = h_a + h_f = [(1 + x) \cdot m] + [(1.25 - x) \cdot m] = (2 + c) \cdot m = 2.25 \cdot 8 = 18 \text{ mm.}$$

Los radios de las circunferencias de cabeza serán:

$$r_{a1} = r_1 + (1 + x_1) \cdot m = 32 + (1 + 0.353) \cdot 8 = 42.82 \text{ mm.}$$

$$r_{a2} = r_2 + (1 + x_2) \cdot m = 44 + (1 + 0.176) \cdot 8 = 53.41 \text{ mm.}$$

Y los radios de las circunferencias de pie serán:

$$r_{f1} = r_1 - (1.25 - x_1) \cdot m = 32 - (1.25 - 0.353) \cdot 8 = 24.82 \text{ mm.}$$

$$r_{f2} = r_2 - (1.25 - x_2) \cdot m = 44 - (1.25 - 0.176) \cdot 8 = 35.41 \text{ mm.}$$

El pasó será: $p = p_1 = p_2 = \pi \cdot m = \pi \cdot 8 = 25.13 \text{ mm.}$

Los espesores de los dientes (en la circunferencia primitiva de referencia) serán:

$$s_1 = \frac{m \cdot \pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot \alpha = \frac{8 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot 0.353 \cdot 8 \cdot 20^\circ = 14.62 \text{ mm.}$$

$$s_2 = \frac{m \cdot \pi}{2} + 2 \cdot x_2 \cdot m \cdot \alpha = \frac{8 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot 0.176 \cdot 8 \cdot 20^\circ = 13.59 \text{ mm.}$$

Y los huecos interdentes, a la altura de la circunferencia primitiva de referencia, serán:

$$e_1 = \frac{m \cdot \pi}{2} - 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot \alpha = \frac{8 \cdot \pi}{2} - 2 \cdot 0.353 \cdot 8 \cdot 20^\circ = 10.51 \text{ mm}$$

$$e_2 = \frac{m \cdot \pi}{2} - 2 \cdot x_2 \cdot m \cdot \alpha = \frac{8 \cdot \pi}{2} - 2 \cdot 0.176 \cdot 8 \cdot 20^\circ = 11.54 \text{ mm.}$$

Para realizar un montaje con dos engranajes tallados en V, donde no exista holgura circunferencial, debe efectuarse un montaje en V, siendo el ángulo de contacto en funcionamiento:

$$Ev\alpha' = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \alpha + Ev\alpha$$

El valor aproximado del ángulo de contacto en funcionamiento se puede extraer de la tabla de evolventes, siendo la evolvente del ángulo de contacto en funcionamiento igual a:

$$Ev\alpha' = 2 \cdot \frac{0.353 + 0.176}{8 + 11} \cdot 20^\circ + Ev20^\circ = 0.020273 + 0.014904 = 0.035177$$

Y el ángulo de contacto en funcionamiento será: $\alpha' \approx 26.3^\circ$

Luego, los radios primitivos de funcionamiento serán:

$$r_1' = r_1 \cdot \frac{\cos \cos \alpha}{\cos \cos \alpha'} = 32 \cdot \frac{\cos \cos 20^\circ}{\cos \cos 26.3^\circ} = 33.54 \text{ mm.}$$

$$r_2' = r_2 \cdot \frac{\cos \cos \alpha}{\cos \cos \alpha'} = 44 \cdot \frac{\cos \cos 20^\circ}{\cos \cos 26.3^\circ} = 46.12 \text{ mm.}$$

Y la distancia entre ejes sería igual a la suma de los radios primitivos de funcionamiento:

$$a' = r_1' + r_2' = 33.54 + 46.12 = 79.66 \text{ mm.}$$

Parámetro del engranaje	Piñón	Rueda
Número de dientes (z)	8	11
Coefficiente de desplazamiento (x)	0.353	0.176
Desplazamiento en la talla (x·m) (mm)	2.824	1.408
Módulo (m) (mm)	8	8
Ángulo de presión de referencia (α) (°)	20	20
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	32	44
Radio primitivo de funcionamiento (r) (mm)	33.54	46.12
Radio base (r _b) (mm)	30.07	41.35
Radio de cabeza (r _a) (mm)	42.82	53.41
Radio de pie (r _f) (mm)	24.82	35.41
Paso (p) (mm)	25.13	25.13
Hueco (e) (mm)	10.51	11.54
Espesor (s) (mm)	14.62	13.59
Huelgo de referencia (c) (mm)	2	2
Ángulo de presión en el montaje (α) (°)	26.3°	
Distancia entre ejes de funcionamiento (a') (mm)	79.66	

La holgura radial se extrae restándole a la distancia entre ejes de funcionamiento el radio de cabeza de una de las ruedas y el radio de pie de la otra:

$$\text{Holgura radial} = a' - (r_{a1} + r_{f2}) = a' - (r_{a2} + r_{f1})$$

Luego, para este caso, sería:

$$\text{Holgura radial} = 79.66 - (42.82 + 35.41) = 79.66 - (53.41 + 24.82) = 1.43 \text{ mm.}$$