

OpenCourseWare

Teoría de Máquinas

CRISTINA CASTEJÓN, EDUARDO CORRAL, RAÚL GISMEROS, MARÍA JESÚS GÓMEZ,
JESÚS MENESES, HIGINIO RUBIO, ABRAHAM VADILLO

Trenes de Engranajes

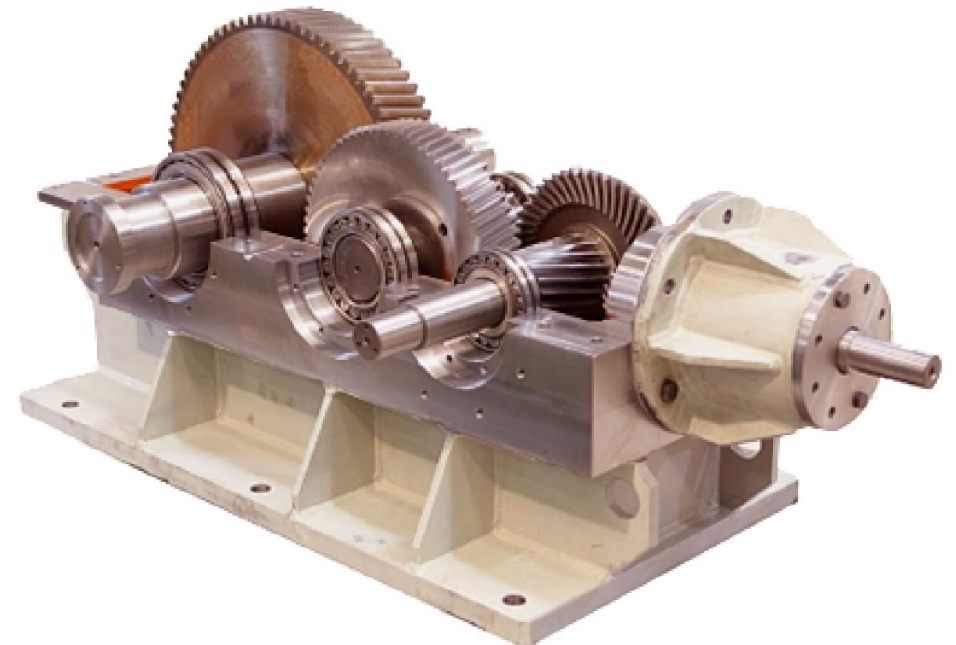


Índice

- Introducción a Trenes de engranajes
- Clasificación
- Trenes de engranajes ordinarios
- Trenes de engranajes epicicloidales

Trenes de engranajes

- Cadena cinemática formada por varios engranajes
- Se utilizan cuando no es posible obtener una relación de transmisión (i) entre dos ejes mediante una sola pareja de ruedas dentadas:
 - i muy elevada.
 - i fracción irreducible de términos muy elevados.
 - i razón inconmensurable.
 - Distancia entre ejes muy grande.
 - Invertir o conservar el sentido de giro.



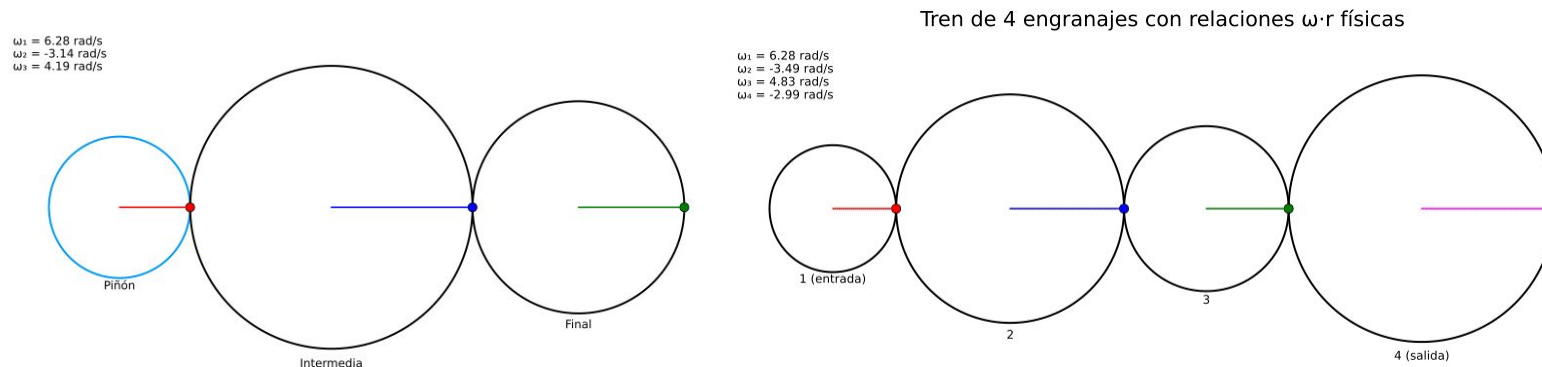
Trenes de engranajes

- En el diseño de trenes de engranes, es conveniente:
 - **$Z \geq 14$** , pues si $Z < 14$ □ PENETRACIÓN
 - **Z no muy alto**, pues si Z muy elevado □ PROBLEMAS DE PASO
 - Existe un $i_{\text{máx}}$ (5-7) que no debe sobrepasarse:
 - Disminuye el rendimiento
 - Aumenta el desgaste
 - Se incrementa el ruido
 - Aumentan las diferencias en el montaje
 - Las i parciales deben ser lo más parecidas posibles
 - Intentar que el mayor número de ruedas sean iguales
 - Cuando hay dos soluciones posibles que cumplen especificaciones se selecciona el tren con menor número total de dientes



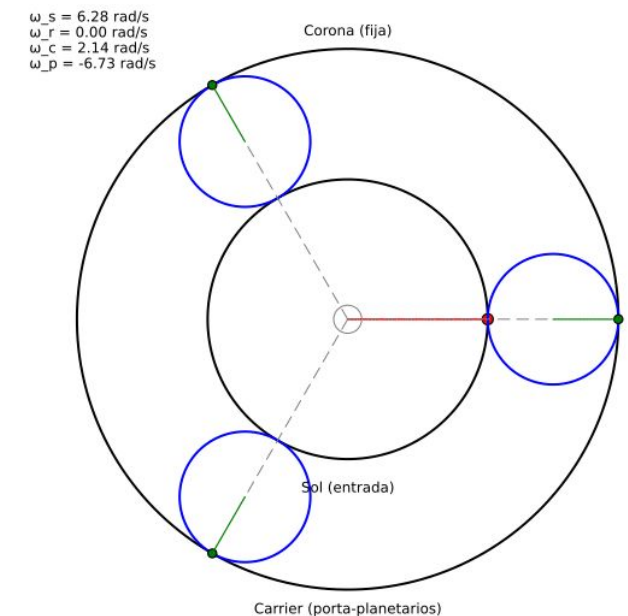
Clasificación según su configuración

- **Trenes ordinarios:** la transmisión se realiza entre las ruedas intermedias. Los ejes se apoyan sobre un soporte fijo.



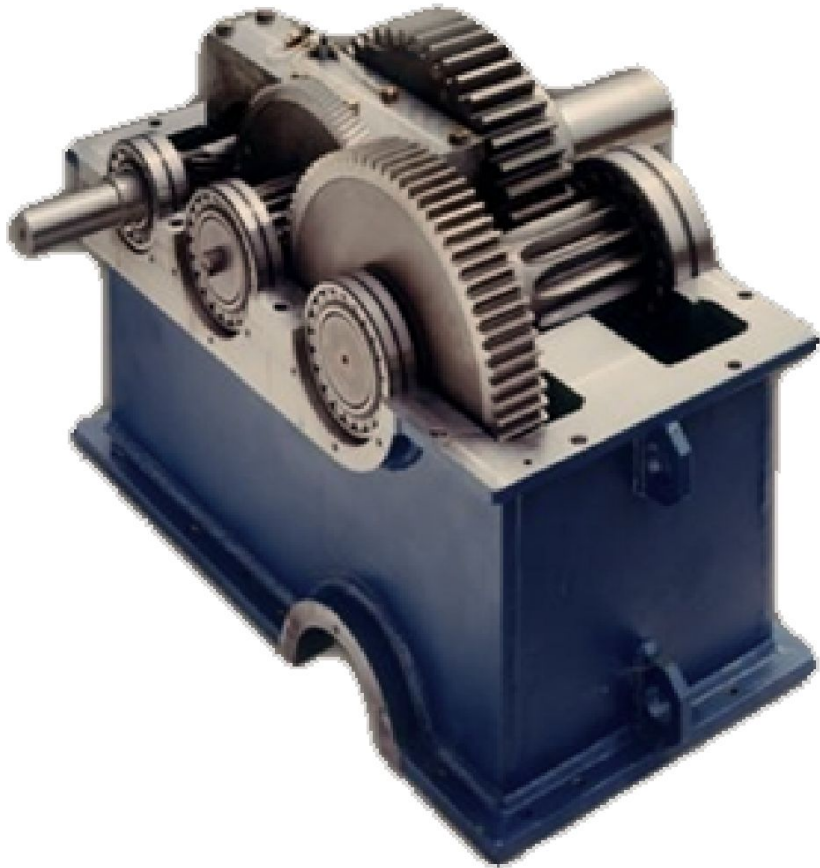
- **Trenes epicicloidales:** los ejes del tren de engranajes se apoyan sobre un soporte que es móvil (gira).

Tren planetario: sol + 3 planetarios + corona

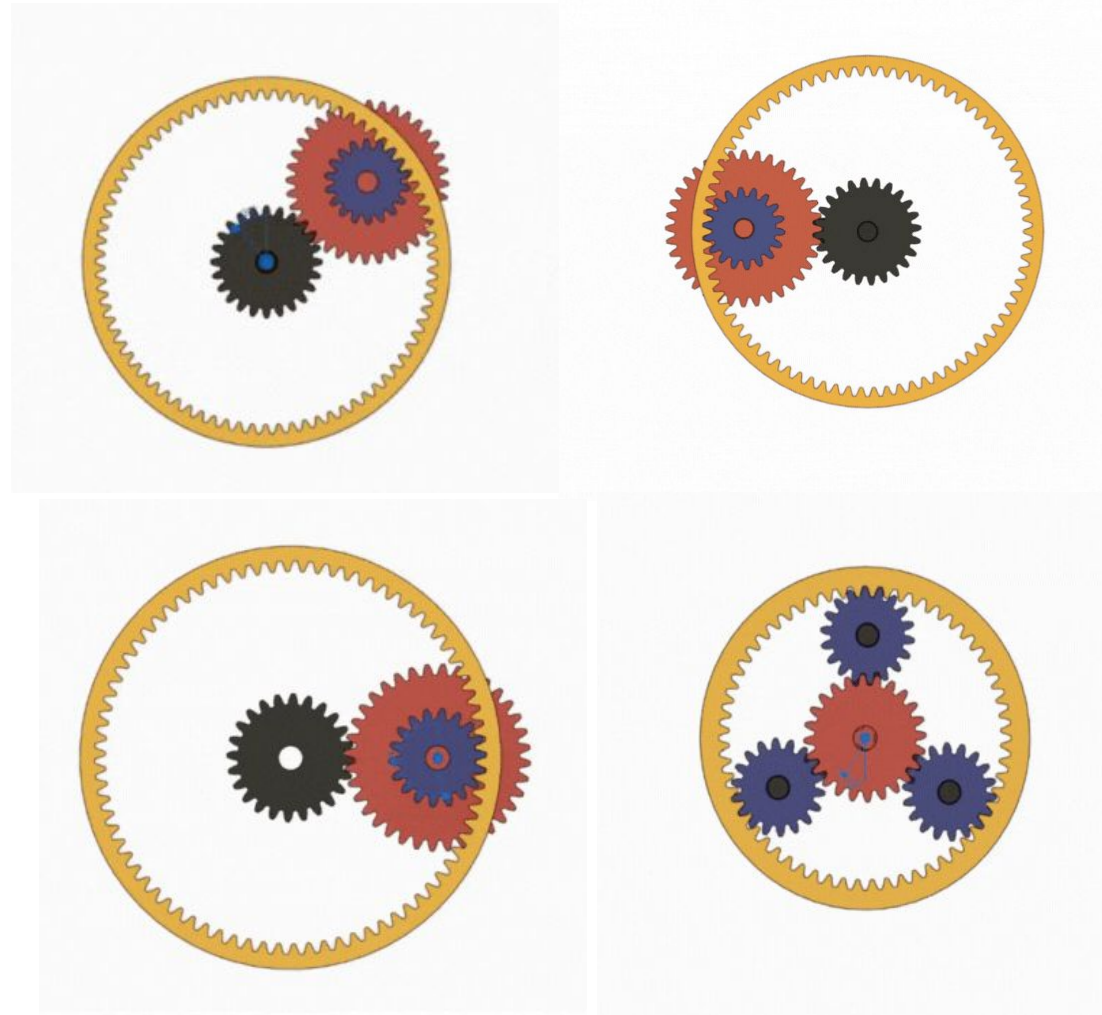


Trenes de engranajes

TRENES ORDINARIOS



TRENES EPICICLOIDALES



Clasificación según su configuración

- **Tren ordinario.** Los ejes de todas las ruedas están apoyados en el soporte. Los ejes sólo pueden girar respecto a si mismos.
 - ***Tren ordinario simple.*** Cada eje sólo contiene una rueda dentada. La relación de transmisión viene determinada por el número de dientes de la rueda dentada inicial y la final. El resto de las ruedas son parásitas o locas, sólo transmiten movimiento.
 - ***Tren ordinario compuesto.*** Algún eje puede tener dos ruedas dentadas. Los ejes intermedios tienen dos ruedas y los de entrada y salida sólo una.
- **Tren epicicloidal.** Algunos ejes pueden ser móviles, tienen movimiento relativo respecto algún otro eje .Pueden clasificarse en:
 - **Tren epicicloidal simple.**
 - **Tren epicicloidal de balancín.**
 - **Tren diferencial.**
- **Tren mixto.** Tren donde se combinan los dos tipos de trenes anteriores.

Trenes ordinarios: Nomenclatura indicado los ejes

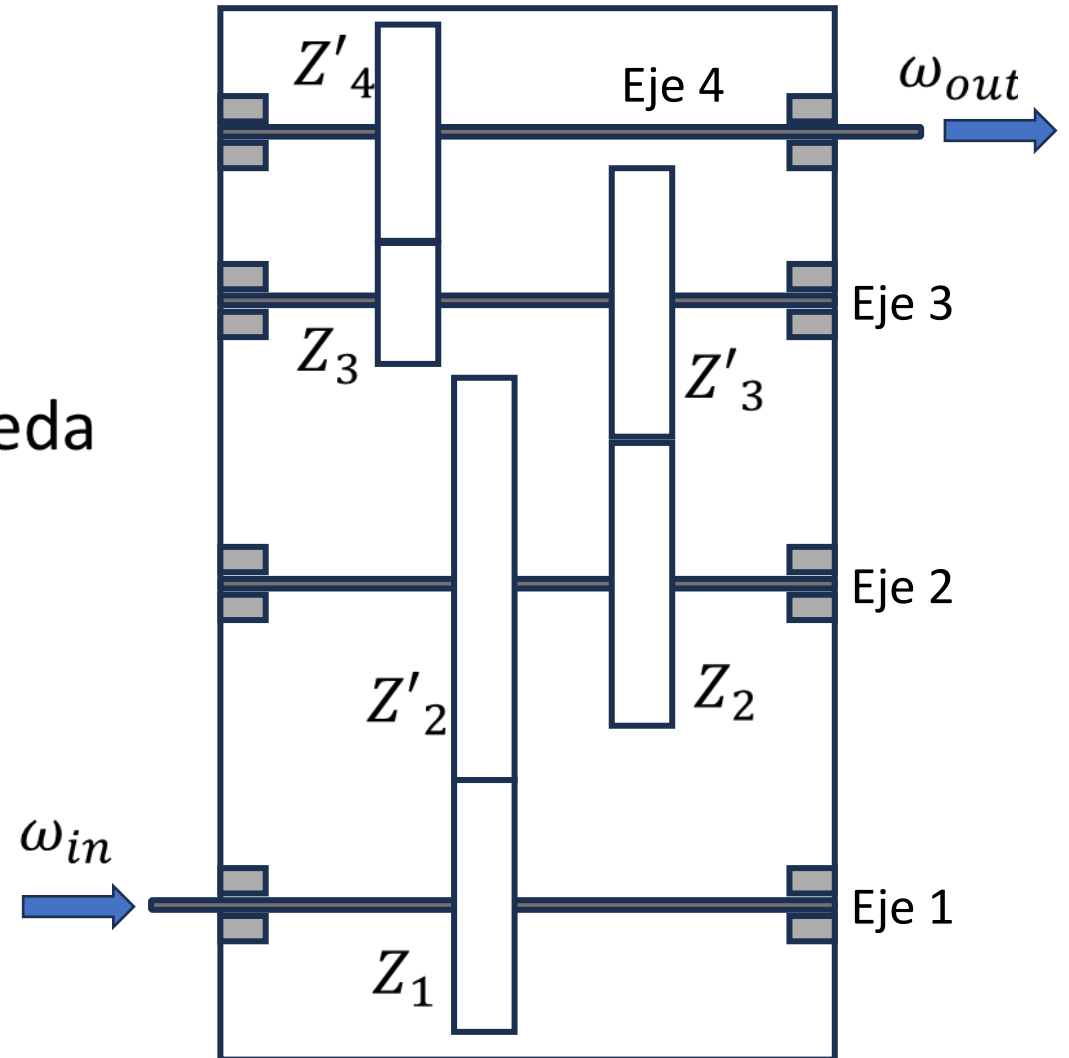
NOMENCLATURA

- Z número de dientes de la rueda
- El subíndice indica el eje de la rueda
- El término primo (') se le añade a la rueda conducida

Si hay m pares de ruedas

$$Z_1 Z'_2, Z_2 Z'_3, \dots, Z_{m-1} Z'_m$$

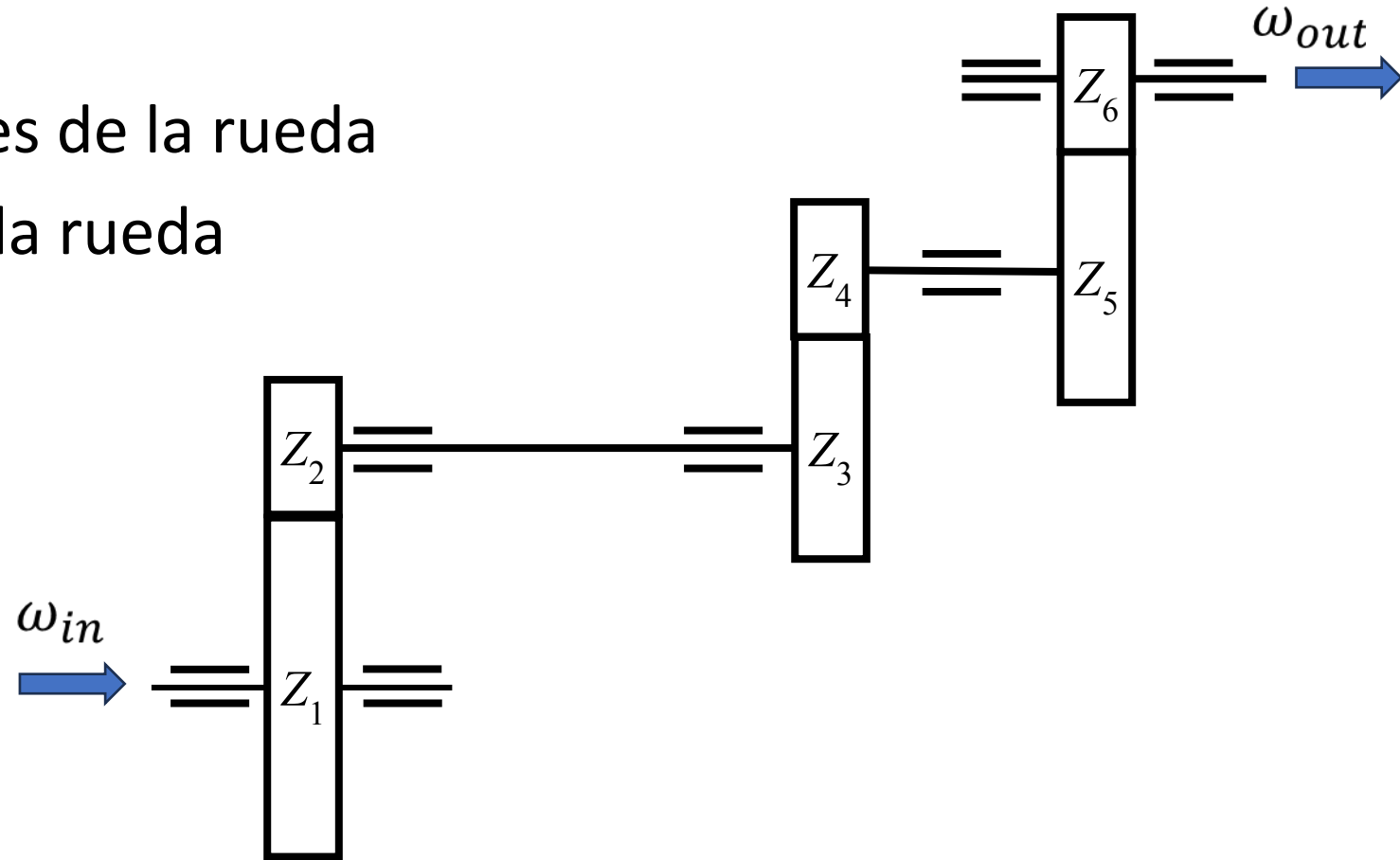
Necesariamente habrá $m+1$ ejes



Trenes ordinarios: Nomenclatura según ruedas

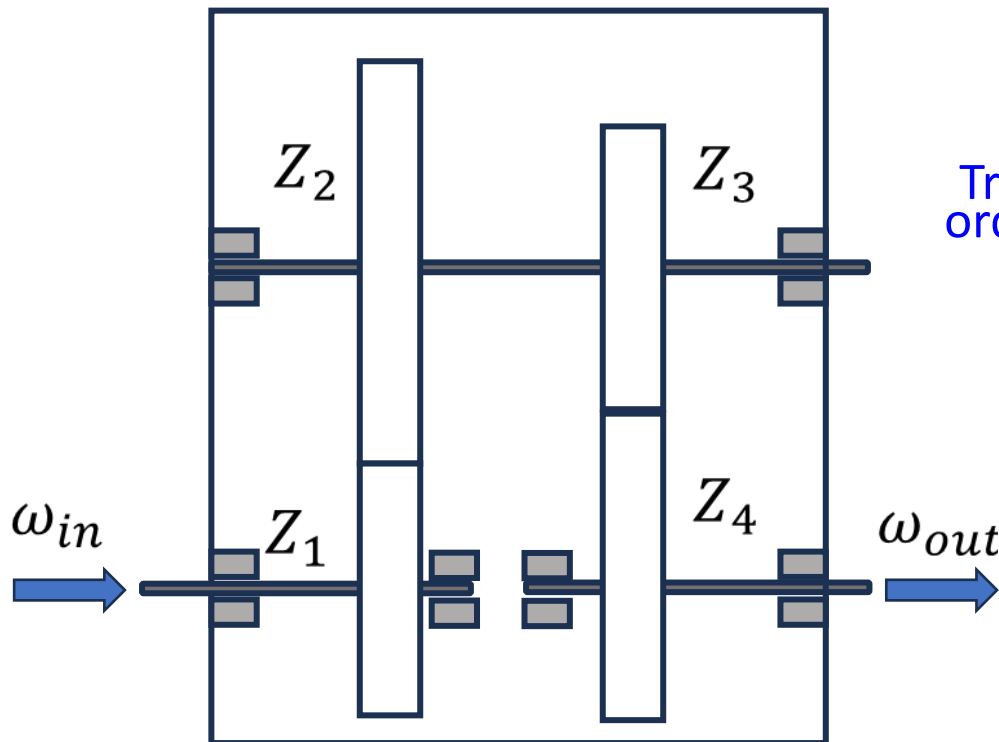
NOMENCLATURA

- Z número de dientes de la rueda
- El subíndice indica la rueda

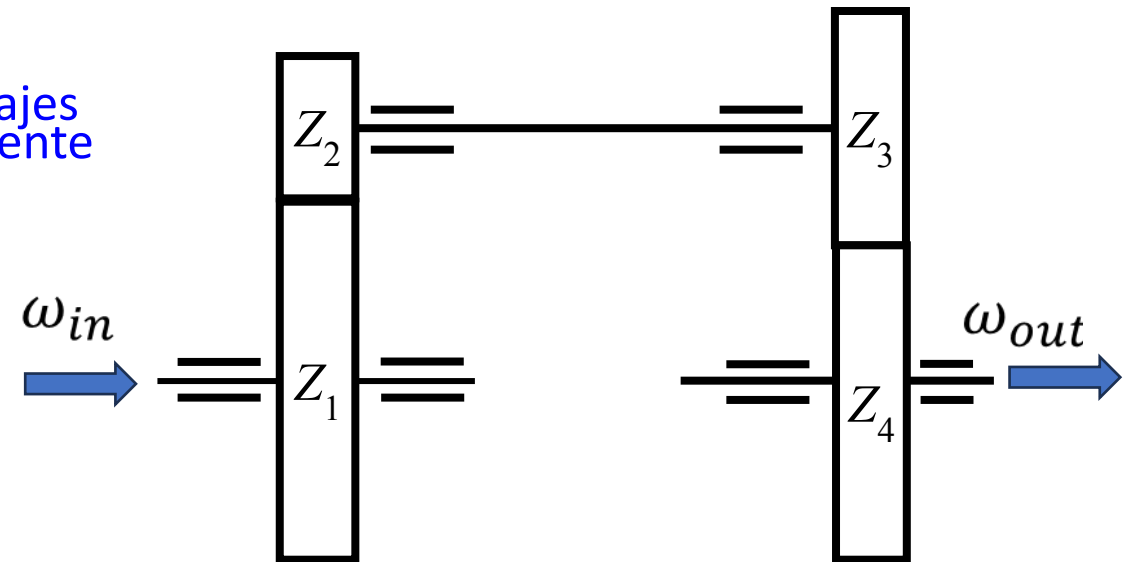


Trenes de engranajes recurrentes

- Los trenes de engranajes pueden tener los ejes de entrada y salida paralelos, perpendiculares o coaxiales (el eje de entrada y el de salida están alineados, también denominados trenes **recurrentes** o *concurrentes*).



Tren de engranajes
ordinario recurrente



Trenes ordinarios: Estudio cinemático

$$\dot{\mu}_{tren} = \mu = \frac{\omega_m}{\omega_0} = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_m$$

$$\mu_{tren} = \frac{Z_0}{Z_1'} \frac{Z_1}{Z_2'} \dots \frac{Z_{m-1}}{Z_m'} = \frac{\prod Z_{CONDUCTORAS}}{\prod Z_{CONDUCIDAS}}$$

$$\mu_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{Z_0}{Z_1'}$$

$$\mu_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2'}$$

.

.

.

$$\mu_m = \frac{\omega_m}{\omega_{m-1}} = \frac{Z_{m-1}}{Z_m'}$$

Nota- El signo de la relación de transmisión μ_{tren} depende del sentido de giro de la velocidad angular de entrada y de salida

Cálculo de los pares de ruedas

En el montaje de pares de ruedas dentadas, se define una relación de transmisión máxima $\mu_{\max}$ (5, 7 o 10, según la aplicación) que no debe sobrepasarse:

- Disminuye el rendimiento
- Aumenta el desgaste
- Se incrementa el ruido
- Aumentan las diferencias en el montaje

$$\mu \leq (\mu_{\max})^m \rightarrow m \geq \left\lceil \frac{\log \mu}{\log \mu_{\max}} \right\rceil$$

m = número de pares de ruedas del tren de engranajes

$m+1$ = número de ejes del tren de engranajes

Cálculo del número de dientes

- Una vez fijado el número de ejes (m+1)

$$\mu = \frac{Z_0}{Z_1'} \cdot \frac{Z_1}{Z_2'} \cdot \dots \cdot \frac{Z_m}{Z_{m+1}'} = \prod_1^{m+1} \mu_i$$

- Las relaciones de transmisión parciales μ_i deben cumplir:

$$\mu_i < \mu \quad \text{y} \quad \mu_i < \mu_{\text{máx}}$$

- Las posibles indeterminaciones se resuelven considerando las condiciones constructivas o de montaje:
 - Distancia y posición de los ejes finales
 - Número de dientes de la rueda final o de los piñones
 - Velocidades de los ejes intermedios

Diseño de trenes de engranajes ordinarios

- Diferentes casos posibles □ el método de resolución varía en función de las especificaciones.
 - **Caso 1:** la relación de transmisión μ es mayor que la máxima recomendada para un par de ruedas y el número de dientes utilizado es menor que el número de dientes máximo $Z_{\text{máx}}$.
 - **Caso 2:** la μ es mayor que la máxima recomendada y además es una fracción irreducible de términos inferiores al $Z_{\text{máx}}$.
 - **Caso 3:** la μ puede ser mayor o menor la máxima recomendada, pero es una fracción irreducible de términos mayores que el $Z_{\text{máx}}$.
 - **Caso 4:** la μ es un valor inconmensurable (números irracionales).

Caso 1: $\mu > \mu_{\text{máx}}$ con $Z < Z_{\text{máx}}$

•

1. Se fija m (número de engranes necesarios)
2. Se fija el número de dientes de los piñones

$$\mu = \frac{\prod Z_{\text{CONDUCTORAS}}}{\prod Z_{\text{CONDUCIDAS}}}$$

Conducidas = piñones
Por ser $\mu > \mu_{\text{max}}$

3. Se obtienen el producto total del número de dientes de los engranajes conductores y se descompone. Habrá tantas soluciones como combinaciones posibles, limitadas por ciertas condiciones.

Ejemplo: $\mu=58/1$

Caso 1: ejemplo $\mu=58/1$ con $\mu_{\max}=7$

•

1. Se fija **m** (número de engranes necesarios) $m \geq \frac{\log(58)}{\log 7} = 2.0867 \rightarrow m = 3$

2. Se fija el número de dientes de los piñones $\mu = \frac{58}{1} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3}{Z'_2 \cdot Z'_3 \cdot Z'_4}$

Los piñones son $Z'_2 \cdot Z'_3 \cdot Z'_4 = 15 \cdot 15 \cdot 15$

3. Se obtienen el producto total del número de dientes de los engranajes conductores y se descompone.

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 58 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 2 \cdot 29 \cdot 5^3 \cdot 3^3 = 58 \cdot 45 \cdot 75$$

$$\boxed{\mu = \frac{58}{1} = \frac{58}{15} \cdot \frac{45}{15} \cdot \frac{75}{15}}$$

Caso 2: $\mu > \mu_{\text{máx}}$ es una fracción irreducible cuyos términos tienen todos sus divisores primos inferiores a $z_{\text{máx}}$

1. Se fija el número mínimo de pares de ruedas m
2. Se fijan las z de los piñones, estableciendo que tengan factores comunes con el denominador de la fracción.
3. Se obtiene $\prod z_{\text{CONDUCTORAS}}$ y se descompone

Ejemplo: $\mu=369/46$

Caso 2: ejemplo $\mu=369/46$ con $Z_{\max}=100$ y $\mu_{\max}=7$

1. Se fija el número mínimo de pares de ruedas **m**: $m \geq \frac{\log(369/46)}{\log 7} = 1,07 \rightarrow m = 2$
2. Se fijan las **Z** de los piñones, estableciendo que tengan factores comunes con el denominador de la fracción.

$$\mu = \frac{369}{46} = \frac{3^2 \cdot 41}{2 \cdot 23} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z'_2 \cdot Z'_3}$$

Los piñones son $Z'_2 \cdot Z'_3 = 23 \cdot 20$

3. Se obtiene $\prod Z_{\text{CONDUCTORAS}}$ y se descompone

$$Z_1 \cdot Z_2 = \frac{3^2 \cdot 41}{2 \cdot 23} \cdot 23 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 82 \cdot 45$$

$$\boxed{\mu = \frac{369}{46} = \frac{45}{20} \cdot \frac{82}{23}}$$

Caso 3 (Método 1): μ entera o fraccionaria con factores primos superiores a $Z_{\text{máx}}$

- Con trenes ordinarios no hay solución exacta → solución aproximada

MÉTODO 1

- Si $\mu = \frac{a}{b}$, una solución aproximada es $\mu_1 = \frac{a \cdot n \pm c}{b \cdot n}$

$$\text{Error Absoluto} = \frac{a \cdot n \pm c}{b \cdot n} - \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{c}{b \cdot n} \qquad \text{Error Relativo} = \frac{\frac{c}{b \cdot n}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{a \cdot n}$$

Ejemplo: $\mu=281/2$

Caso 3 (Método 2): μ entera o fraccionaria con factores primos superiores a $Z_{\text{máx}}$

- Con trenes ordinarios no hay solución exacta → solución aproximada

MÉTODO 2

- Se desarrolla $\mu = \frac{a}{b}$ en fracciones continuas y se adopta como solución una de las reducidas $\mu_{Rn} = \frac{d}{e}$
- El error absoluto es: $\varepsilon = |\mu - \mu_{Rn}|$
- El error absoluto es menor que el cuadrado del denominador de la reducida $\varepsilon < \frac{1}{e^2}$ o $\varepsilon < \frac{1}{e \cdot g}$ siendo $\mu_{Rn+1} = \frac{f}{g}$ la reducida siguiente

Ejemplo: $\mu=135/127$

Caso 4: La relación de transmisión μ es inconmensurable

- La relación de transmisión tiene un número irracional como numerador o denominador
- No puede establecerse una solución exacta $\square$ solución aproximada
- Dos métodos de resolución:
 1. Se sustituye la relación de transmisión μ por una fracción decimal con la aproximación deseada.
 2. Se sustituye la relación de transmisión μ por las reducidas sucesivas de una fracción continua equivalente a la dada.
- Posteriormente, con la fracción decimal o la continua se opera de la forma indicada en los casos anteriores.

Ejemplo: $\mu = \pi$

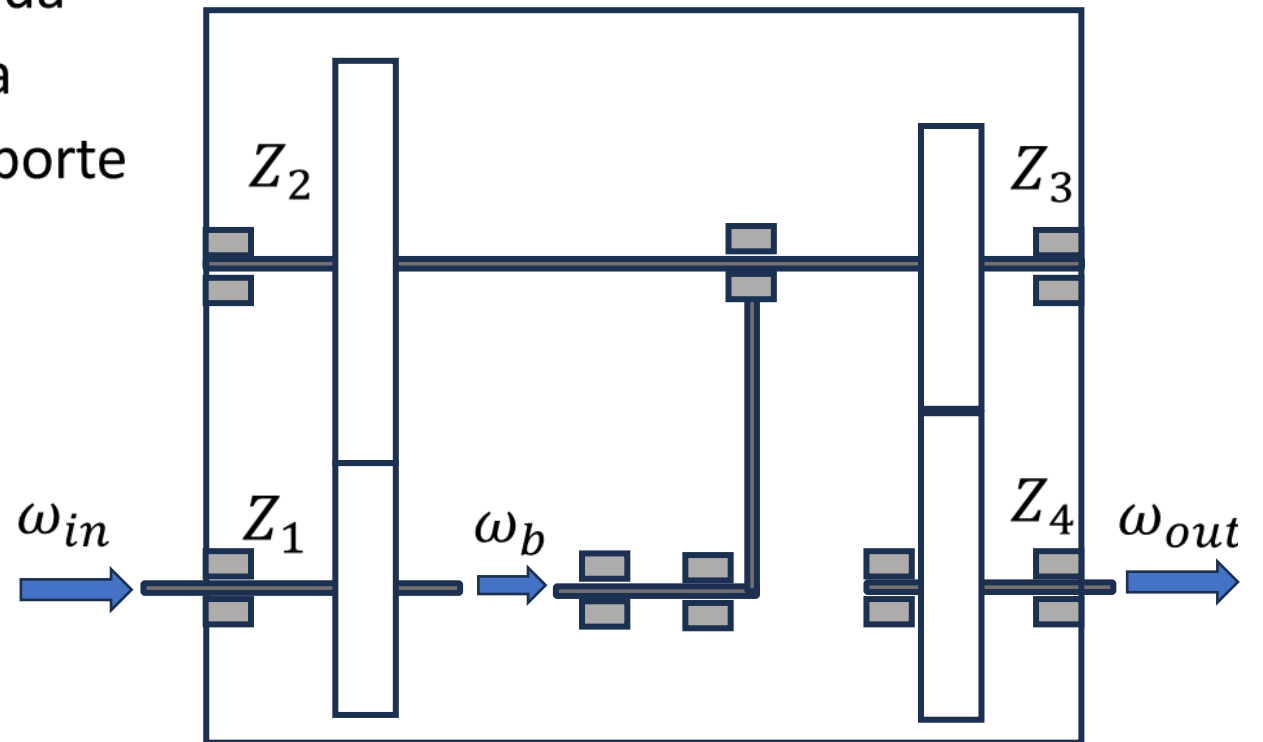
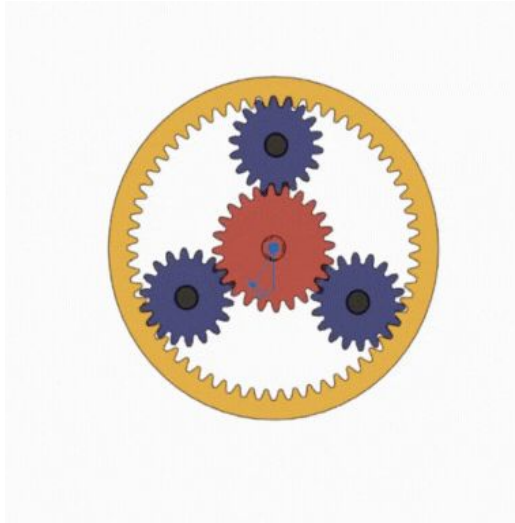
Trenes epicicloidales

Se dan cuando los ejes de un tren de engranajes se apoyan sobre un soporte que a su vez gira alrededor de otro eje.

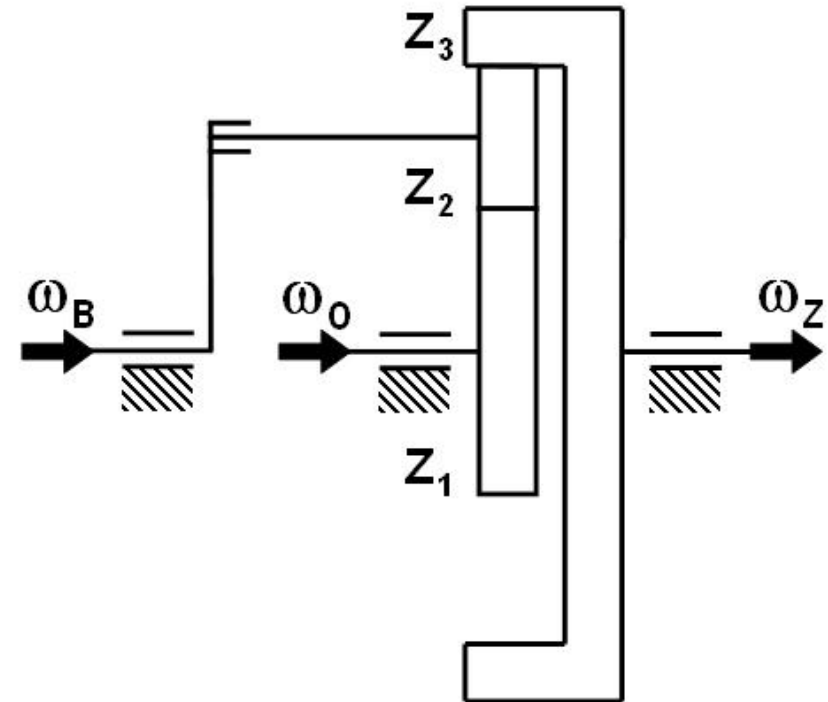
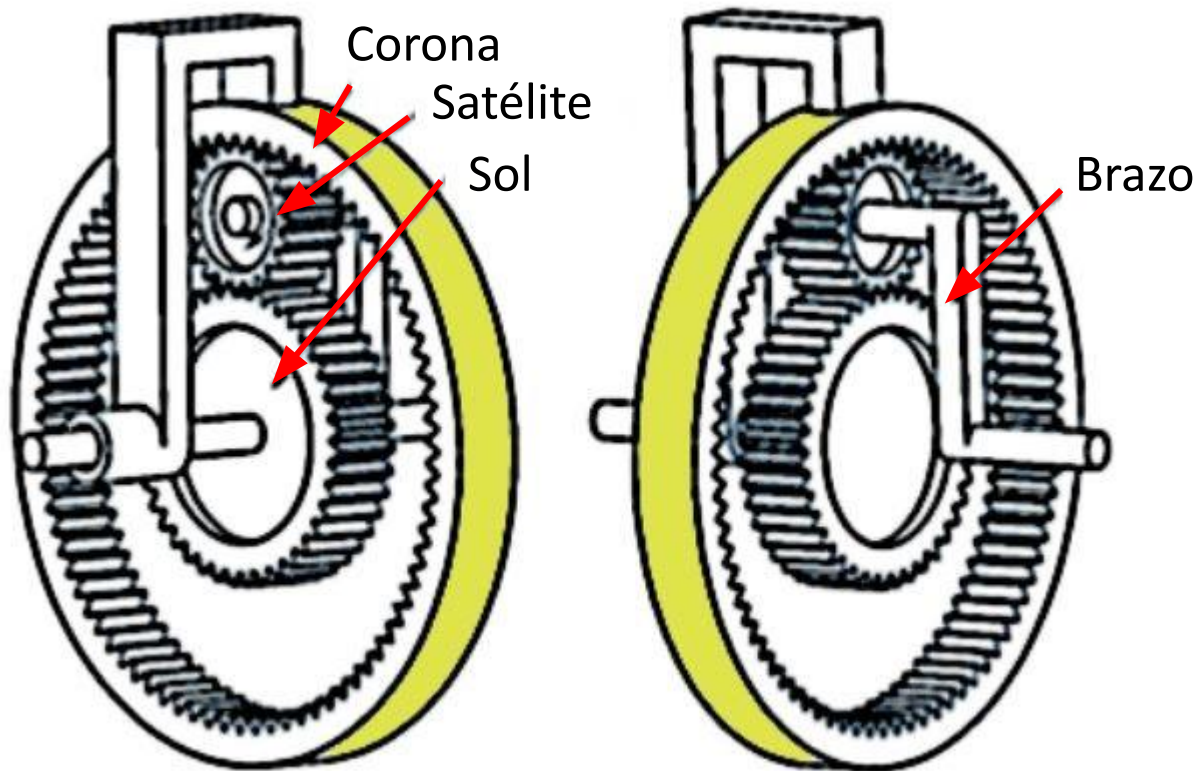
ω_{in} : Velocidad angular del eje entrada

ω_{out} : Velocidad angular del eje salida

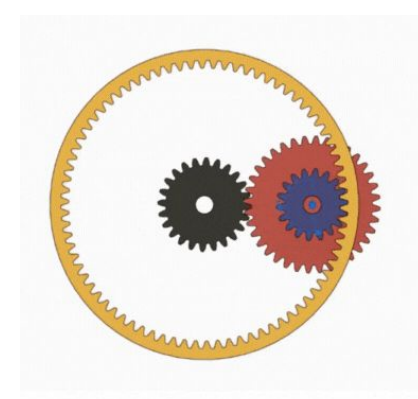
ω_b : Velocidad angular del brazo soporte



Trenes epicicloidales. Trenes planetarios

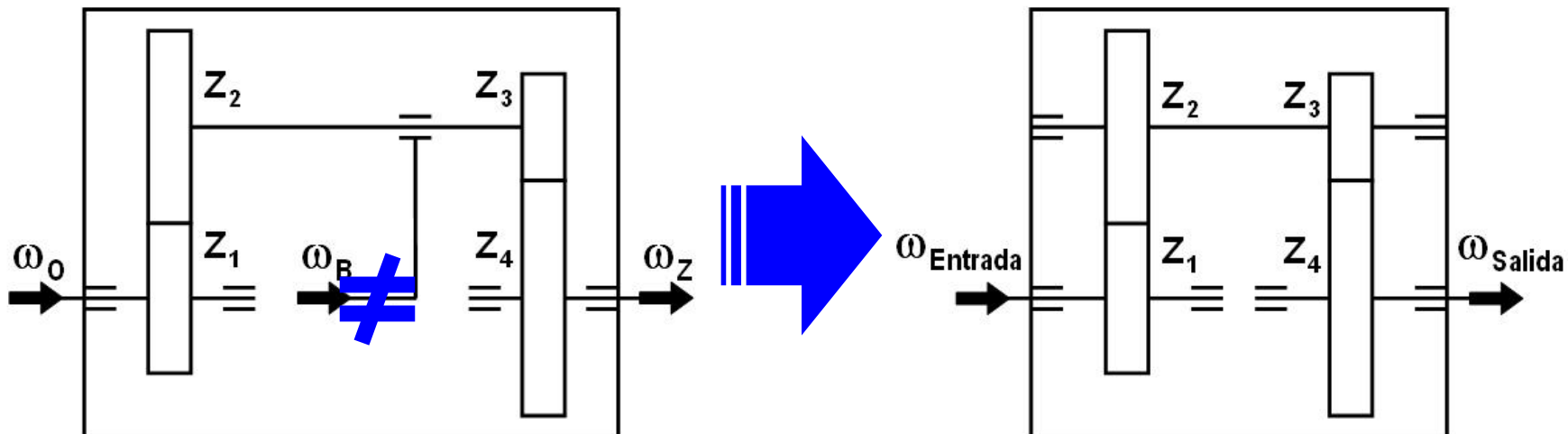


Relación de transmisión aparente



- **La relación de transmisión aparente** μ_A de un tren epicycloidal es la relación de transmisión correspondiente a una velocidad angular nula del brazo ($\omega_B = 0$) □ Es como si el tren funcionara como un tren ordinario.

$$\mu_A = \pm \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} \cdot \dots \cdot \frac{Z_{m-1}}{Z_m} = \pm \frac{\prod Z_{\text{CONDUCTORAS}}}{\prod Z_{\text{CONDUCTIDAS}}}$$



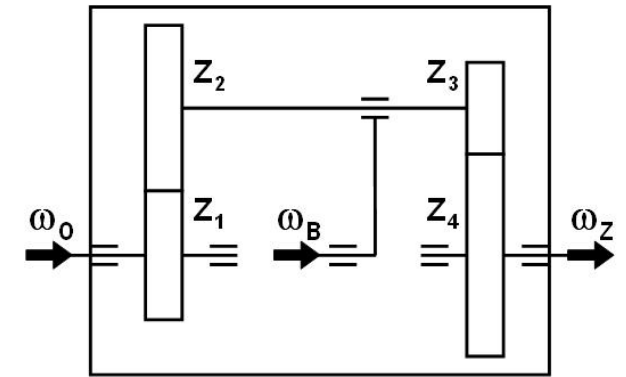
Fórmula de Willis

- Si los ejes extremos y los del soporte son paralelos, la relación de velocidades se calcula mediante la **fórmula de Willis**
- Si a todo el conjunto se le da una velocidad angular $-\omega_B$, el tren se ordinario, resulta:

- El eje de entrada gira a $\omega_O - \omega_B$
- El eje de salida gira a $\omega_Z - \omega_B$
- El brazo soporte gira a $\omega_B - \omega_B = 0$

convierte en

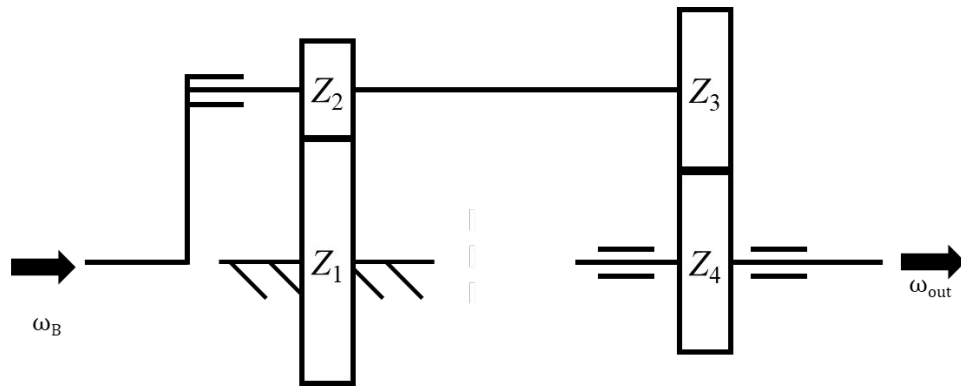
$$\mu_A = \frac{\omega_Z - \omega_B}{\omega_O - \omega_B}$$



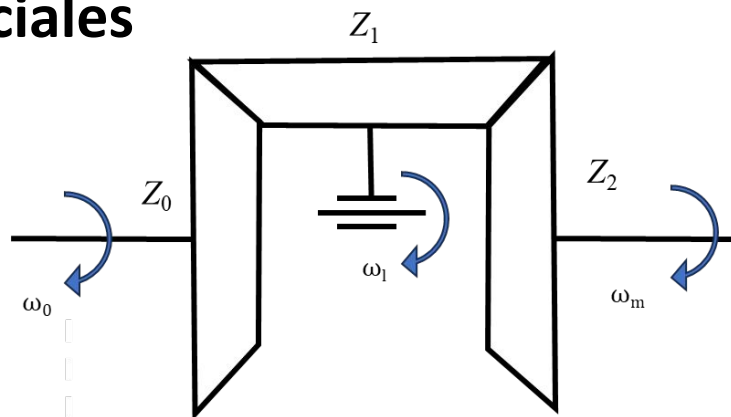
- La relación de transmisión aparente μ_A se establecerá con el signo que corresponda.

Tipos de trenes epicicloidales

Simple

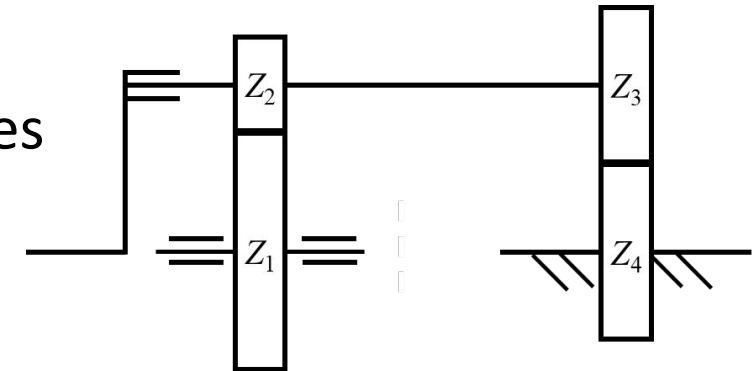


Diferenciales

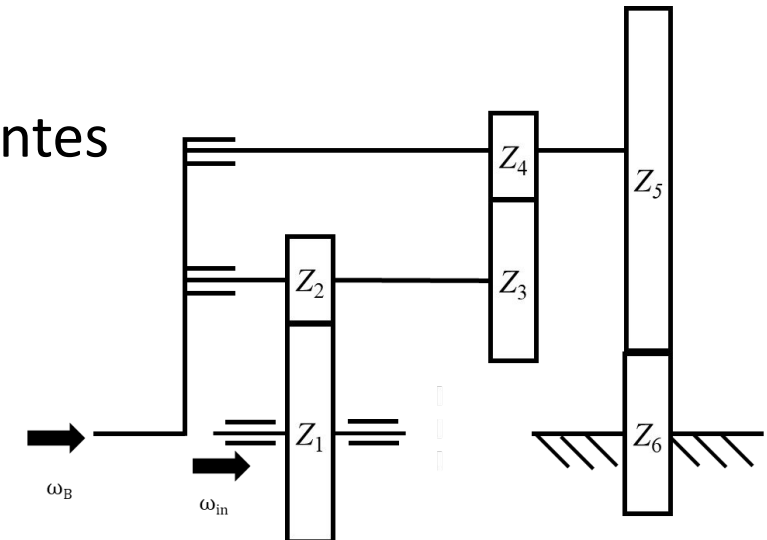


De balancín

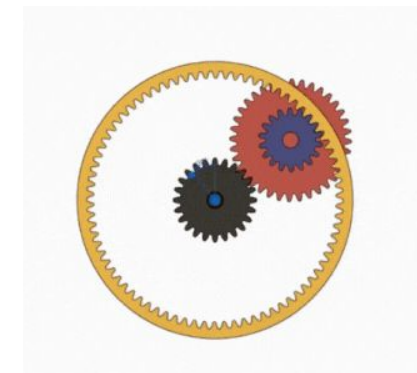
- No recurrentes



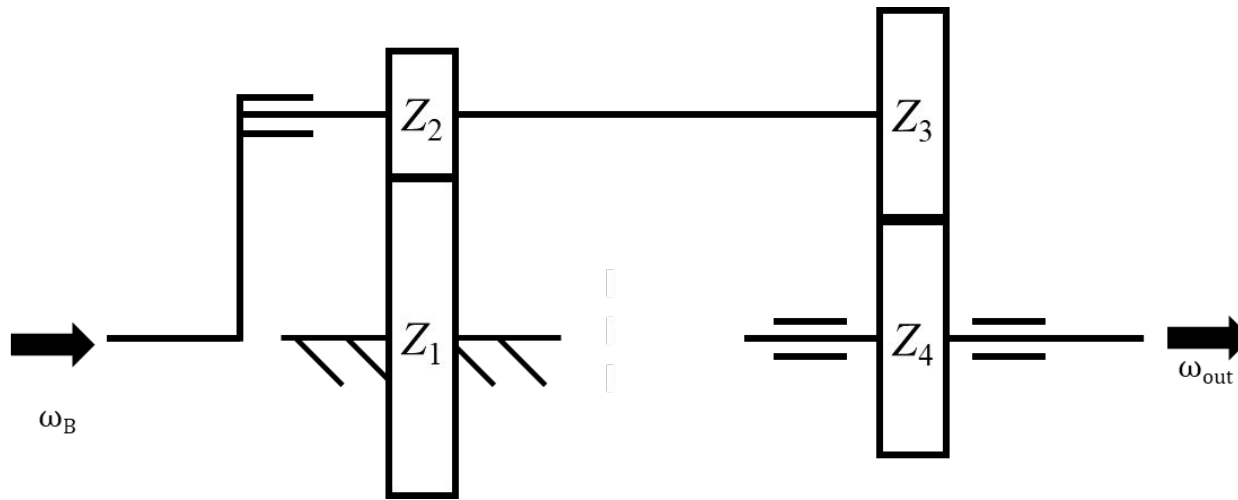
- Recurrentes



Trenes epicicloidales simples

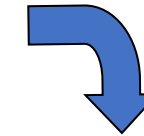


Se fija la primera rueda ($\omega_{in} = 0$) y se establece la transmisión entre el último eje (ω_{out}) y el soporte (ω_b)



$$\mu_A = \frac{\omega_{out} - \omega_b}{\cancel{\omega_{in}} - \omega_b} = 1 - \frac{\omega_{out}}{\omega_b}$$

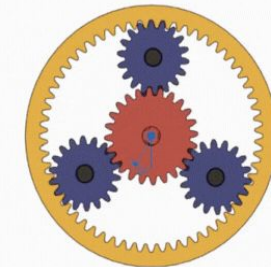
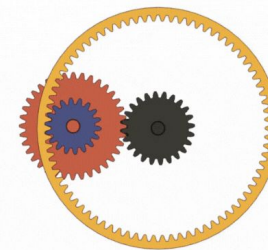
$$\frac{\omega_{out}}{\omega_b} = 1 - \mu_A$$



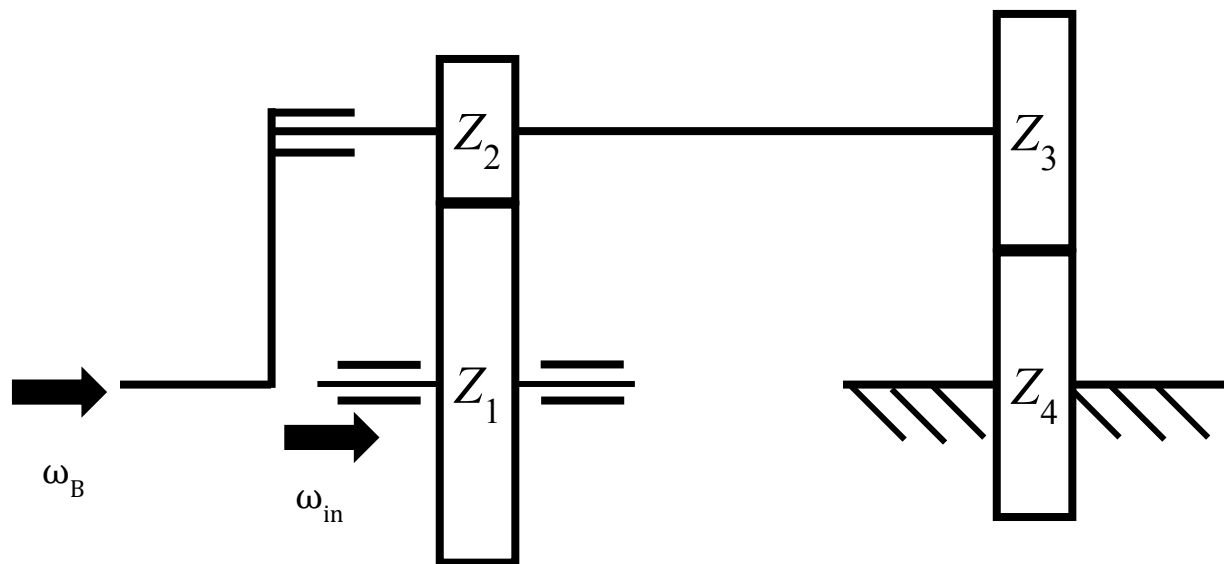
$$\mu_A = \left(-\frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot \left(-\frac{Z_3}{Z_4}\right) = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}$$

- Si $\mu_A < 0 \rightarrow$ Multiplicación. A mayor valor absoluto mayor multiplicación.
- Si $0 < \mu_A < 1 \rightarrow$ Reducción. Valores muy próximos a uno logran reducciones muy elevadas.
- Si $\mu_A > 1 \rightarrow$ inversión del sentido de la marcha
 - $\mu_A > 2 \rightarrow$ Multiplicador. A mayor valor absoluto de μ_A mayor es la multiplicación.
 - $\mu_A < 2 \rightarrow$ Reductor. Si el valor está muy cercano a uno, se alcanzan altas reducciones.

Trenes epicicloidales de balancín

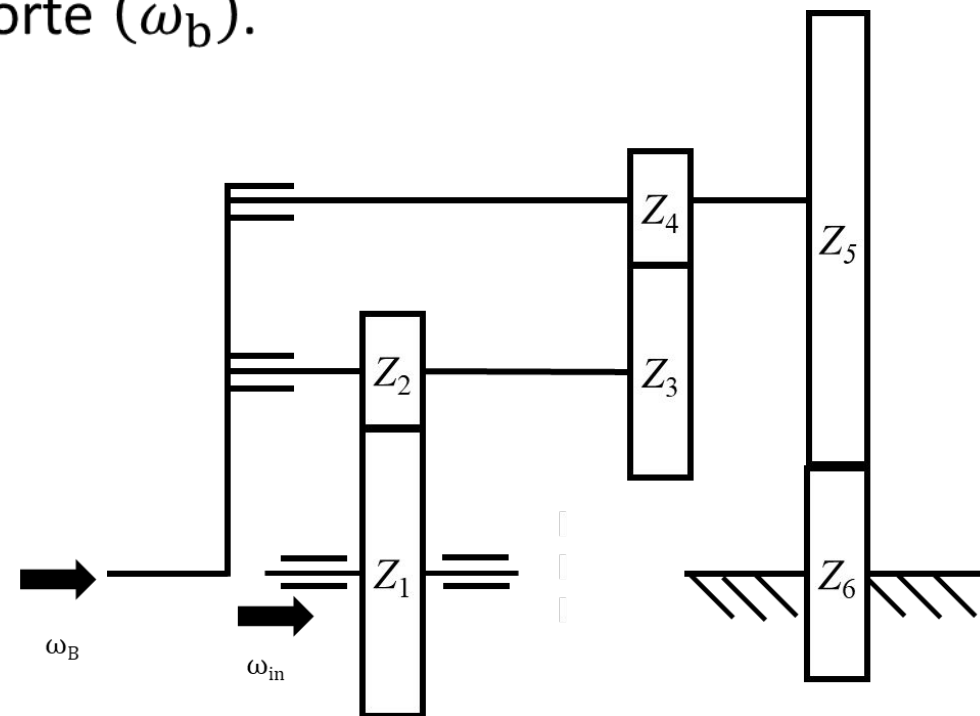


Se mantiene, sin girar sobre sí misma, la última rueda, ($\omega_{out} = 0$). Se establece la transmisión entre la primera rueda (ω_{in}) y el soporte (ω_b).



Tren No Recurrente

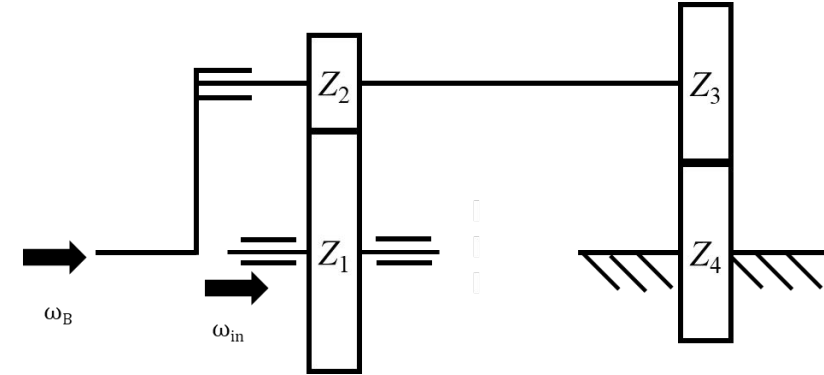
El eje de la última rueda gira con el brazo soporte



Tren Recurrente

Trenes epicicloidales de balancín

- Al establecer la transmisión entre la primera rueda y el soporte:



$$\mu_A = \frac{\omega_{\text{out}} - \omega_b}{\omega_{\text{in}} - \omega_b} \Rightarrow \frac{1}{\mu_A} = \frac{\omega_{\text{in}} - \omega_b}{-\omega_b} = \frac{\omega_{\text{in}}}{-\omega_b} + 1$$

$$\boxed{\frac{\omega_{\text{in}}}{\omega_b} = 1 - \frac{1}{\mu_A}} \Rightarrow \mu_A = \left(-\frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot \left(-\frac{Z_3}{Z_4}\right) = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}$$

- Si $\mu_A < 0.5 \rightarrow$ Multiplicación. Si el valor absoluto es muy pequeño (próximo al cero) se alcanzan relaciones muy elevadas.
 - $\mu_A < 0 \rightarrow$ Se conserva el sentido de giro.
 - $\mu_A > 0 \rightarrow$ Inversión de la marcha.
- Si $\mu_A > 0.5 \rightarrow$ Reducción. Valores próximos a uno (superiores o inferiores) logran altas reducciones.
 - $\mu_A < 1 \rightarrow$ Inversión del sentido de giro.
 - $\mu_A > 1 \rightarrow$ Se conserva el sentido de la marcha. Cuanto mayor es su valor más se aproxima a una relación de transmisión final cercana a uno.

Mecanismos reductores

- En trenes epicicloidales simples, de balancín o diferenciales se pueden conseguir transmisiones con gran reducción de velocidad con sólo 3 ejes

Epicicloidales simples

$$\frac{\omega_M}{\omega_L} = 1 - \frac{Z_0 \cdot Z_1}{Z'_1 \cdot Z'_2}$$

si $\left(\frac{Z_0 \cdot Z_1}{Z'_1 \cdot Z'_2} \right) \xrightarrow{\text{TIENDE A}} 1 \Rightarrow \frac{\omega_M}{\omega_L} \rightarrow 0$

Epicicloidales de balancín

$$\frac{\omega_O}{\omega_L} = 1 - \frac{1}{\mu_A} = 1 - \frac{Z'_1 \cdot Z'_2}{Z_0 \cdot Z_1}$$

si $\left(\frac{Z'_1 \cdot Z'_2}{Z_0 \cdot Z_1} \right) \xrightarrow{\text{TIENDE A}} 1 \Rightarrow \frac{\omega_O}{\omega_L} \rightarrow 0$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = Z'_1 \\ Z_0 = 100 \\ Z'_2 = 101 \end{array} \right\} \frac{\omega_M}{\omega_L} = 1 - \frac{Z_0 \cdot Z_1}{Z'_1 \cdot Z'_2} = 1 - \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

Tren diferencial

- Se mantienen $\omega_{in} \neq 0$, $\omega_b \neq 0$, $\omega_{out} \neq 0$
- Funciones del tren diferencial.
 1. Recoger en un solo eje el efecto de dos movimientos alrededor de otros dos ejes

$$\frac{\omega_{out} - \omega_b}{\omega_{in} - \omega_b} = \mu_A \Rightarrow \omega_b = \frac{\omega_{out}}{1 - \mu_A} - \frac{\mu_A}{1 - \mu_A} \cdot \omega_{in}$$

Según el signo y la magnitud de μ_A se obtendrá en el eje 1 la suma o diferencia de velocidades proporcionales a ω_{in} y ω_{out} .

2. Distribuir el movimiento de un eje en otros dos
“el movimiento de ω_b se distribuye en ω_{in} y ω_{out} según la ecuación anterior, fijando uno de ellos o estableciendo una relación entre ellos”.

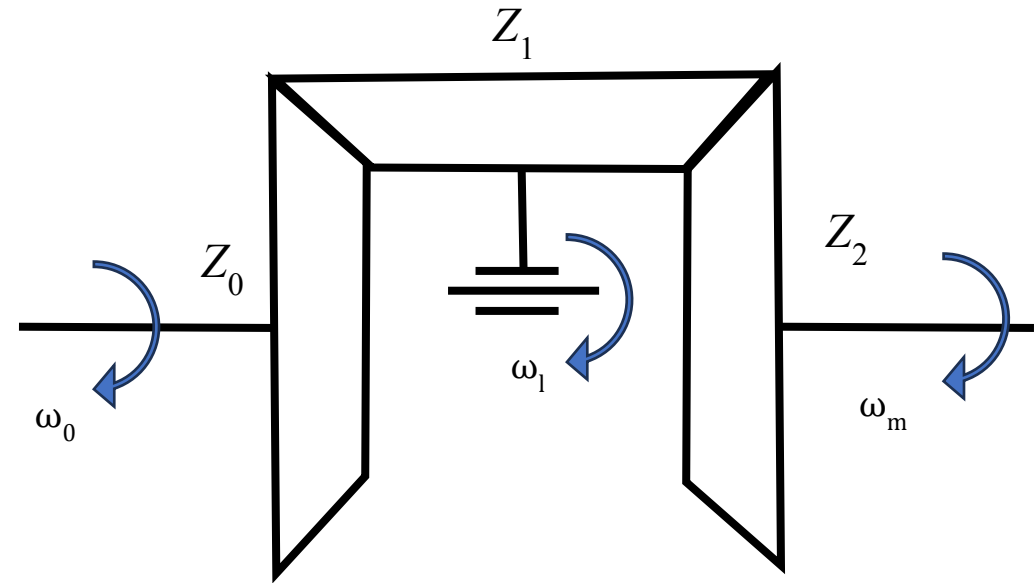
Diferenciales

$$\mu_A = -\frac{Z_0}{Z_1} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{Z_0}{Z_2} \Rightarrow$$

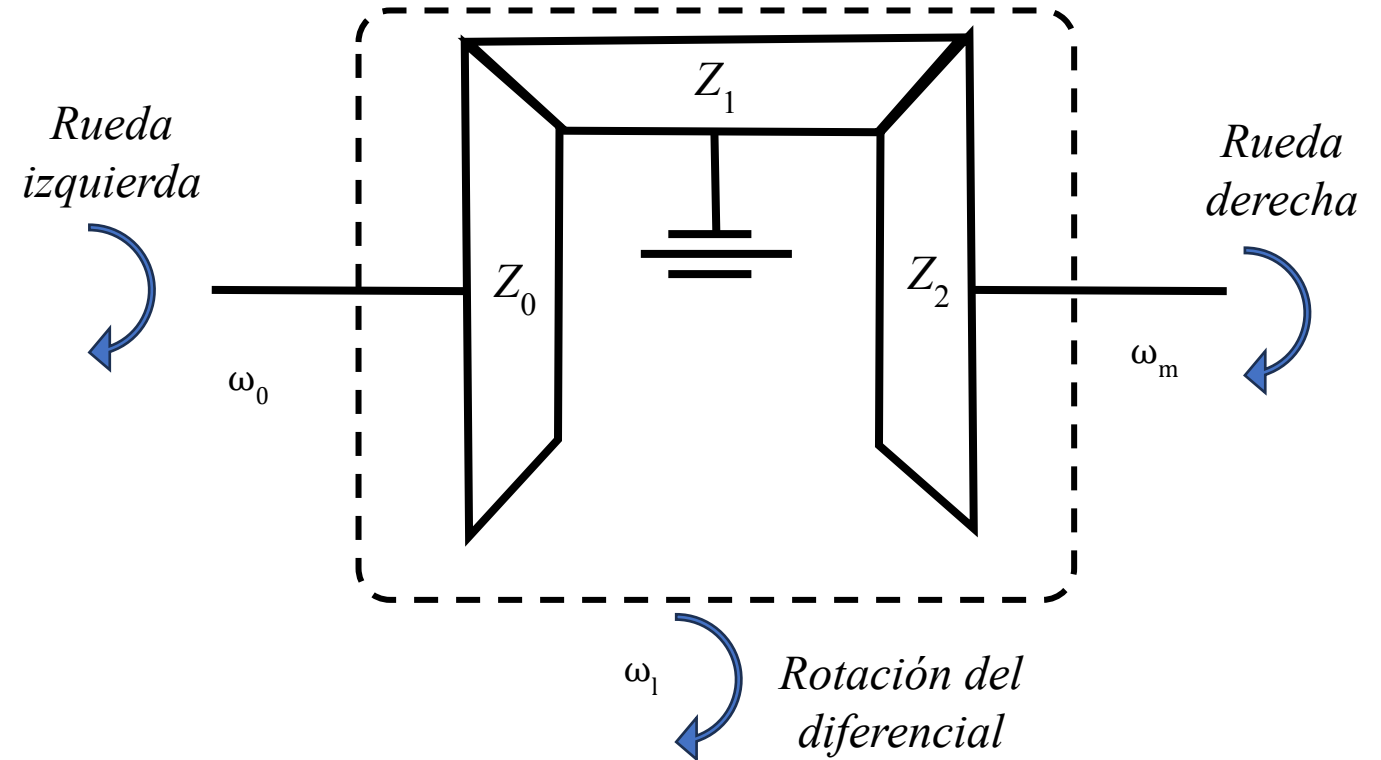
$$\text{si } \rightarrow Z_0 = Z_2 \Rightarrow \mu_A = -1$$

$$\text{como } \omega_L = \frac{\omega_M}{1 - \mu_A} - \frac{\mu_A}{1 - \mu_A} \cdot \omega_O$$

$$\Rightarrow \omega_L = \frac{\omega_O + \omega_M}{2}$$



Tren diferencial de automóvil (I)



- ω_o □ velocidad de giro rueda izquierda
- ω_M □ v. de giro de rueda derecha
- ω_L □ v. de giro de caja diferencial

Al ser los engranajes planetarios iguales:

$$\mu_A = -1 \Rightarrow \omega_L = \frac{\omega_O + \omega_M}{2}$$

Tren diferencial de automóvil. Movimiento en línea recta

- El par resistente de cada rueda motriz es el mismo, luego al aplicar pares iguales sobre cada rueda ($M_{R_izquierda} = M_{R_derecha}$) se producen velocidades iguales:

$$\omega_O = \omega_M \quad \Rightarrow \quad \omega_L = \omega_O = \omega_M$$

- Al ser la velocidad de la caja diferencial $\omega_L = (\omega_O + \omega_M)/2$ las potencias transmitidas a cada rueda son iguales (Potencia = $M \cdot \omega$)
 - En este caso, la velocidad de giro libre es $\omega_s = 0$.

Tren diferencial de automóvil. Movimiento en curva (I)

- La rueda exterior tiene que recorrer mayor distancia que la interior en el mismo tiempo:
 - Mayor velocidad lineal
 - Mayor velocidad angular
- Ya que las ruedas son iguales:
 - Si no existiera el diferencial (eje continuo) éste sufriría un esfuerzo de torsión y una de las ruedas patinaría.

Tren diferencial de automóvil. Movimiento en curva (II)

- En este caso $\omega_O > \omega_M$

$$V_O = \omega_O \cdot r_{\text{rueda}}$$

$$V_O = \omega_M \cdot r_{\text{rueda}}$$

$$V_O = \omega_{\text{vehículo}} \cdot \left(r + \frac{a}{2} \right)$$

$$V_O = \omega_{\text{vehículo}} \cdot \left(r - \frac{a}{2} \right)$$

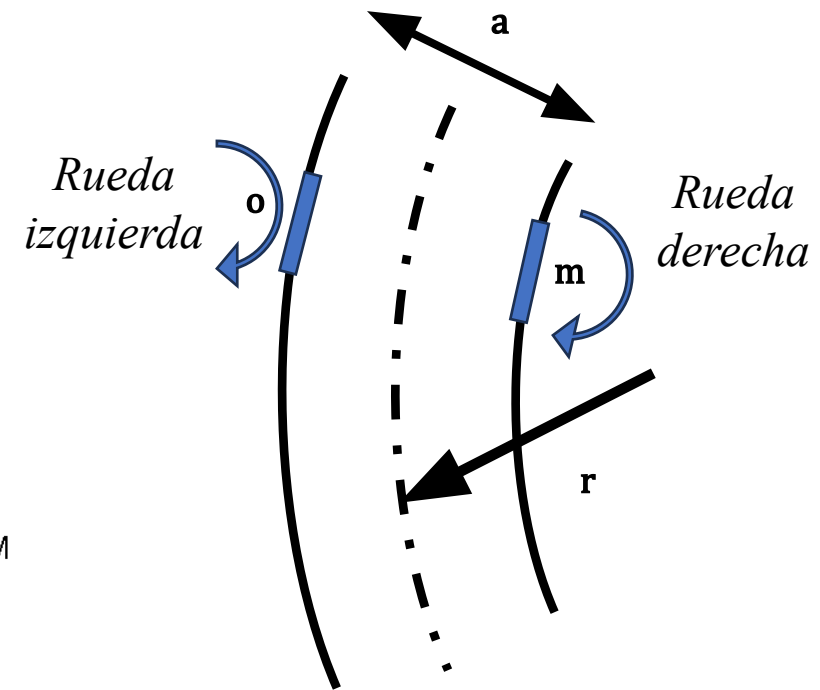
entonces :

$$\frac{2 \cdot r + a}{2 \cdot r - a} = \frac{\omega_O}{\omega_M} \begin{cases} \omega_{\text{vehículo}} \cdot \left(r + \frac{a}{2} \right) = \omega_O \cdot r_{\text{rueda}} \\ \omega_{\text{vehículo}} \cdot \left(r - \frac{a}{2} \right) = \omega_M \cdot r_{\text{rueda}} \end{cases}$$

$$\text{como : } \omega_L = \frac{\omega_O + \omega_M}{2} = \frac{\omega_M \cdot \left(\frac{2 \cdot r + a}{2 \cdot r - a} \right) + \omega_M}{2} = \frac{2 \cdot r}{2 \cdot r - a} \cdot \omega_M$$

$$\text{luego como : } \omega_M \neq \omega_O \Rightarrow \omega_S \neq 0 \begin{cases} \omega_M = \frac{2 \cdot r - a}{2 \cdot r} \cdot \omega_L \\ \omega_O = \frac{2 \cdot r + a}{2 \cdot r} \cdot \omega_L \end{cases}$$

Como el par es el mismo para cada rueda, la potencia que se suministra a cada rueda varía proporcionalmente a la velocidad



Tren diferencial de automóvil. Frenado de una de las ruedas

- Si, por ejemplo, una rueda no gira ($\omega_M = 0$) la otra rueda gira a doble velocidad que la caja:

$$\omega_L = \frac{\omega_O + \cancel{\omega_M}}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_O = 2 \cdot \omega_L} \quad \omega_S \neq 0$$

- Luego la potencia será transmitida totalmente a la rueda que gira para compensar la diferencia de velocidad
- Ejemplos: hielo, enclavamiento en una rueda

Créditos imágenes

Pág. 3: Imagen generada por Gemini 2.5

Pág. 4: Imagen generada por Gemini 2.5

Pág. 6: Imagen adaptada por Gemini 2.5