

OpenCourseWare

TEORÍA DE MÁQUINAS

CRISTINA CASTEJÓN SISAMÓN

EDUARDO CORRAL ABAD

RAÚL GISMEROS MORENO

MARIA JESÚS GÓMEZ GARCÍA

JESÚS MENESES ALONSO

HIGINIO RUBIO ALONSO

ABRAHAM VADILLO MORILLAS

Ejercicios de trenes de engranajes



1. Obtenga un tren de engranajes ordinario con una relación de transmisión $i = 36$. La relación de transmisión máximas es $1/5 \leq i \leq 5$ y el número de dientes permitidos $14 \leq Z \leq 100$.

Solución:

$$x \geq \left| \frac{\log \log i}{\log \log i_{\max}} \right| = \left| \frac{\log \log (36)}{\log \log 5} \right|$$

Se debe obtener 3 parejas de ruedas. Se propone los dientes de las ruedas conducidas

$$i = 36 = 2 \cdot 18 = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} \cdot \frac{Z_5}{Z_6} \Rightarrow i = 34 = \frac{Z_1}{15} \cdot \frac{Z_3}{15} \cdot \frac{Z_5}{15}$$

$$Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^5 \Rightarrow Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5 = (5 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2) = 45 \cdot 45 \cdot 60$$

Una posible solución sería:

$$i = 34 = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} \cdot \frac{Z_5}{Z_6} = \frac{60}{15} \cdot \frac{45}{15} \cdot \frac{45}{15}$$

2. Calcule un tren de engranajes ordinario con una relación de transmisión exacta de $i = \frac{1152}{209}$. Las relaciones de transmisión parciales están dentro del rango $1/7 \leq i \leq 7$ y el número de dientes por rueda está comprendido en el rango $18 \leq Z \leq 140$.

Solución:

$$x \geq \left| \frac{\log \log i}{\log \log i_{\max}} \right| = \left| \frac{\log \log \left(\frac{1152}{209} \right)}{\log \log 7} \right|$$

Una posible solución:

$$i = \frac{1152}{209} = \frac{2^7 \cdot 3^2}{11 \cdot 19} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} \Rightarrow i = 2^8 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{22} = \frac{Z_1}{19} \cdot \frac{Z_3}{22}$$

$$Z_1 \cdot Z_3 = 2^8 \cdot 3^2 \Rightarrow Z_1 \cdot Z_3 = (3 \cdot 2^4) \cdot (3 \cdot 2^4) = 48 \cdot 48$$

$$i = \frac{1152}{209} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{48}{19} \cdot \frac{48}{22}$$

3. Proponga un tren de engranajes ordinario que desarrolle una relación de transmisión $i = \sqrt{12}$, con un error absoluto inferior a 10^{-3} , considerando que en las relaciones de transmisión parciales $i_{\max} = 5$ ($1/5 \leq i \leq 5$) y el número de dientes debe estar incluido en el rango $17 \leq Z \leq 100$.

Solución:

$$i = \sqrt{12} = 3,464101615, \text{ se sustituye por } i \approx \frac{34641}{10000}.$$

	3	2	6	2	6	2	2	10
3464 1	1000 0	4641	718	333	52	21	10	1
4641	718	333	52	21	10	1	0	

$$R_1 = 3 \quad E_1 = |i - R_1| = \Rightarrow |3.46410 - 3| = 4.6 \cdot 10^{-1} > 10^{-3}$$

$$R_2 = 3 + \frac{1}{2} = 3.5 \quad E_2 = |i - R_2| = 3.59 \cdot 10^{-2} \Rightarrow > \Rightarrow 10^{-3}$$

$$R_3 = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}} = \frac{45}{13} = 3.461538 \quad E_3 = |i - R_3| = 2.56 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

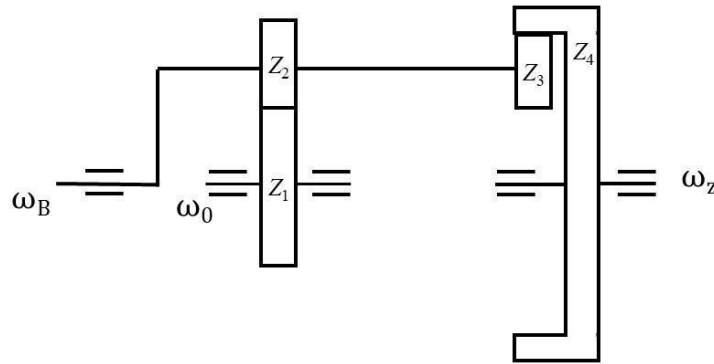
$$R_4 = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}} = \frac{97}{28} = 3.464286 \quad E_4 = |i - R_4| = 1.86 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$$

$$Z_1 = 97$$

$$Z_2 = 28$$

4. Sea el tren de engranajes planetario de la figura, recurrente y con un número de dientes de los engranajes igual a $Z_1 = 24$, $Z_2 = 36$, $Z_3 = 18$ y $Z_4 = 78$. Se pide:

- Si los dos engranes tienen el mismo módulo, comprobar que el tren es recurrente.
- Relación de transmisión entre el eje último y el primero cuando el eje del brazo está fijo.
- Relación de transmisión entre el eje último y el eje del brazo cuando el engranaje primero está fijo.
- Relación de transmisión entre el eje del brazo y el eje primero cuando el engranaje último está fijo.
- Relación de transmisión entre el eje último y el eje primero cuando es conocido que la velocidad de giro del eje del brazo es la mitad que la del eje de entrada.



Solución:

$$a = r_1 + r_2 = r_4 - r_3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_1}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{m_2}{2} \cdot (Z_4 - Z_3)$$

$$\frac{m}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{m}{2} \cdot (Z_4 - Z_3) \quad \Rightarrow \quad (Z_1 + Z_2) = (Z_4 - Z_3) \quad \Rightarrow \quad (24 + 36) = (78 - 18)$$

$$\mu_A = \frac{\omega_Z - \omega_B}{\omega_o - \omega_B} = \frac{\omega_Z}{\omega_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_Z}{\omega_o} = \mu_A$$

$$\mu_A = \left(-\frac{Z_1}{Z_2} \right) \cdot \left(\frac{Z_3}{Z_4} \right) = -\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_Z}{\omega_o} = \mu_A = -\frac{24 \cdot 18}{36 \cdot 78} = -\frac{2}{13}$$

$$\mu_A = \frac{\omega_Z - \omega_B}{\omega_O - \omega_B} = 1 - \frac{\omega_Z}{\omega_B} \Rightarrow \frac{\omega_Z}{\omega_B} = 1 - \mu_A \Rightarrow \frac{\omega_Z}{\omega_B} = 1 - \left(-\frac{2}{13}\right) = \frac{15}{13}$$

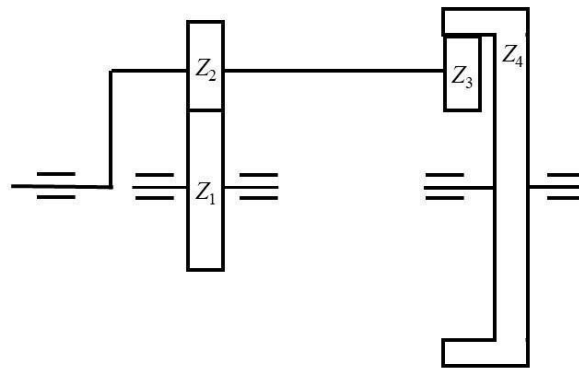
$$\mu_A = \frac{\omega_Z - \omega_B}{\omega_O - \omega_B} = \frac{\omega_B}{\omega_B - \omega_O} = \frac{\frac{\omega_B}{\omega_O}}{\frac{\omega_B}{\omega_O} - 1} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_O} = \frac{\mu_A}{\mu_A - 1} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_O} = \frac{\left(-\frac{2}{13}\right)}{\left(-\frac{2}{13}\right) - 1} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{\omega_Z - \omega_B}{\omega_O - \omega_B} = \mu_A \Rightarrow \omega_B = \frac{1}{1 - \mu_A} \cdot \omega_Z - \frac{\mu_A}{1 - \mu_A} \cdot \omega_O$$

$$\frac{\omega_O}{2} = \frac{1}{1 - \mu_A} \cdot \omega_Z - \frac{\mu_A}{1 - \mu_A} \cdot \omega_O \Rightarrow \frac{1}{1 - \mu_A} \cdot \omega_Z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_A}{1 - \mu_A}\right) \cdot \omega_O = \left(\frac{\mu_A + 1}{2 \cdot (1 - \mu_A)}\right) \cdot \omega_O$$

$$\frac{\omega_Z}{\omega_O} = \frac{\mu_A + 1}{2} \Rightarrow \frac{\omega_Z}{\omega_O} = \frac{\left(-\frac{2}{13}\right) + 1}{2} = \frac{11}{26}$$

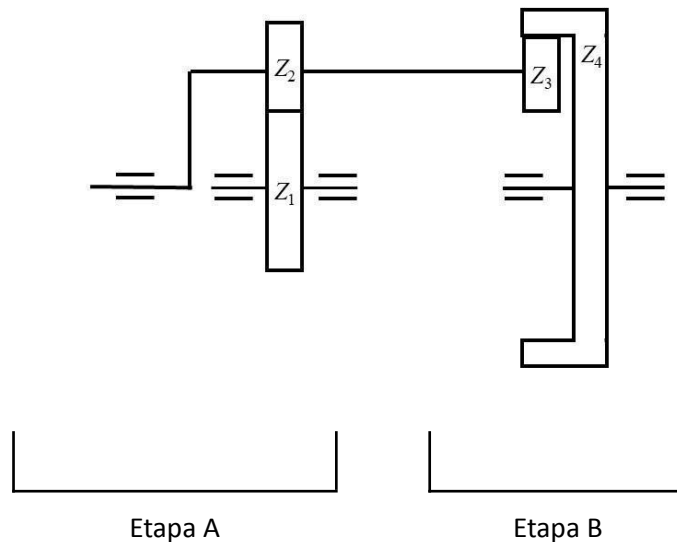
5. El tren de la figura es epicicloidial, recurrente y con las siguientes especificaciones: $i = -49/600$ (cuando $\omega_B = 0$); $Z_1 = 14$; $Z_2 = 30$; $Z_4 = 80$, y $m_A = 3$ para el conjunto A (engranajes Z_1 y Z_2).



- Calcular Z_3 .
- Encontrar el valor del módulo para el conjunto de ruedas B. (engranajes Z_3 y Z_4).
- Calcular $\frac{\omega_Z}{\omega_B}$ cuando $\omega_O = 0$.
- El tren funciona como un diferencial, siendo ω_O y ω_B son las entradas, y ω_Z la salida. Si el valor de ω_O y ω_B es 60 r.p.m en el mismo sentido (por ejemplo, horario). Calcular la velocidad de salida ω_Z .

Sol: a) $Z_3 = 14$ b) $m_b = 2$ c) $\frac{\omega_Z}{\omega_B} = 1.0816$ d) $\omega_Z = 60$ r.p.m

6. En la figura se presenta un tren de engranajes epicicloidial recurrente con las siguientes especificaciones: $Z_1 = 21$; $Z_2 = 30$; $Z_3 = 18$; $Z_4 = 52$, y $m_A = 4$ para la etapa A (Z_2/Z_1).



- a) Calcular la relación de transmisión del tren para la configuración de tren ordinario.
- b) Elegir el valor del módulo de la etapa B (m_B , Z_4/Z_3) de la lista que se incluye abajo para conseguir que el tren sea recurrente.
Valores de módulo disponibles (mm): 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12.
- c) Si se modifica la implementación del tren epicicloidal de manera que $\omega_0 = 0$, calcular la relación de transmisión ω_z/ω_B .

Solución:

- a) $\mu = -63/260$
- b) $m_B = 6$
- c) $\omega_z/\omega_B = 323/260$

7. Determinar el número de dientes de los engranajes, el módulo “m2” y distancia entre ejes “a” de la segunda pareja de engranajes de un tren de engranajes industrial cuya relación de transmisión es $\mu = \frac{738}{133}$, considerando que:
 - Es un tren de engranajes ordinario y recurrente.
 - Las cuatro ruedas dentadas han sido talladas normalizadamente, con una herramienta con un ángulo de presión de referencia= **20°** y módulo **m1 = 5** para la primera pareja de engranajes $Z_1=41$ y $Z_2=19$.
 - La relación de transmisión máxima admitida por engrane es $\frac{1}{5} \leq \mu \leq 5$.
 - NOTA: El número de dientes permitido para este apartado es $11 \leq Z \leq 50$.
- Si se permitiera una relación de transmisión máxima de $\frac{1}{7} \leq \mu \leq 7$ y cumpliendo el resto de las restricciones establecidas anteriormente, calcular el número de dientes de una pareja de ruedas cuya relación de transmisión presente un error absoluto menor de **0.005** respecto a la dada $\mu = \frac{738}{133}$. (Tomar una precisión de 8 decimales)

NOTA: para este apartado considere que las ruedas no pueden tener más de 100 dientes, pero si pueden tener menos de 14 dientes ya que si esto ocurre, realizando talla y montaje este problema se podrá solucionar en el siguiente apartado.

- Se pide rellenar la siguiente tabla para la pareja de ruedas obtenida en el apartado anterior, de manera que no tengas holgura circunferencial, usando una cremallera normalizada ($\alpha = 20^\circ$) y **modulo 5**. Por condiciones de diseño, solo se puede realizar talla en el piñón (no se puede tallar la rueda).

Variable	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)		
Coefficiente de desplazamiento (x)		
Longitud de desplazamiento (x·m) (mm)		
Radio primitivo de referencia (r) (mm)		
Radio base (rb) (mm)		
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)		
Radio de cabeza (ra) (mm)		
Radio de pie (rf) (mm)		
Hueco (e) (mm)		
Espesor (s) (mm)		
Ángulo de presión de funcionamiento (α') (°)		
Holgura radial (c') (mm)		

Solución:

- 1.- El reductor presenta una relación de transmisión $\mu = \frac{738}{133}$ y está compuesta por dos grupos reductores y se cumple:

$$\mu = \mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{738}{133} = \frac{41 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{7 \cdot 19} = \frac{41 \cdot 36}{19 \cdot 14} \Rightarrow \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{36}{14}$$

Siendo el tren de engranajes ordinario y recurrente

$$a = r_1 + r_2 = r_3 + r_4 \Rightarrow a = \frac{m_1}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{5}{2} \cdot (19 + 41) = 150 \text{ mm.}$$

Luego si asociamos debidamente se aprecia que:

$$a = 150 = \frac{5}{2} \cdot (19 + 41) = \frac{m_2}{2} \cdot (14 + 36) \Rightarrow m_2 = 6$$

- 2.- Para hallar la relación de transmisión con una sola pareja de ruedas y un error absoluto menor de 10^{-4} respecto a la dada $\mu = \frac{738}{133}$, se usa el método de descomposición en fracciones continuas hasta hallar una reducida que cumpla las especificaciones.

	5	1	1	4	1	1
73	13	73	60	13	8	5
8	3					
73	60	7	8	5	3	

$$R_1 = 5 \quad E_1 = |\mu - R_1| = |5.548872 - 5| = 0.548872 > 0.005$$

$$R_2 = 5 + \frac{1}{1} = 6 \quad E_2 = |\mu - R_2| = 0.451127 > 0.005$$

$$R_3 = 5 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{11}{2} = 5.5 \quad E_3 = |\mu - R_3| = 0.048872 > 0.005$$

$$R_4 = 5 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{50}{9} = 5.555555 \quad E_4 = |\mu - R_4| = 0.006683 > 0.005$$

$$R_5 = 5 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = \frac{61}{11} = 5.545454 \quad E_5 = |\mu - R_5| = 0.00341 < 0.005$$

$$R_6 = \mu = 5 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}} = \frac{111}{22} = 5.045454 \quad E_6 = |\mu - R_6| < 0.005$$

Las reducidas que provocan un error menor de 0.005 son a partir de la quinta pero la sexta reducida no puede fabricarse (la rueda tiene más de 100 dientes) luego la pareja de ruedas que cumple con todas las especificaciones solicitadas será:

$$\mu' = \frac{61}{11}$$

- 3.- Como el grupo de engrane presenta un módulo $m = 5$ mm. y, como se vio en el apartado anterior, un piñón de $Z_1 = 11$ dientes y una rueda de $Z_2 = 61$ dientes, y como no puede tallar el piñón, realizará un montaje a +V a pesar de que $Z_1 + Z_2 = 80 \geq 28$.

Variable	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	11	61
Coeficiente de desplazamiento (x)	0.172	0
Longitud de desplazamiento (x·m) (mm)	0.882	0
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	27.5	152.5
Radio base (rb) (mm)	25.842	143.303
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	27.625	153.193
Radio de cabeza (ra) (mm)	33.382	157.5
Radio de pie (rf) (mm)	22.132	146.25
Hueco (e) (mm)	7.212	7.854
Espesor (s) (mm)	8.496	7.854
Ángulo de presión de funcionamiento (∠') (°)	20.7	
Holgura radial (c') (mm)	1.186	

La holgura radial se extrae restándole a la distancia entre ejes de funcionamiento el radio de cabeza de una de las ruedas y el radio de pie de la otra:

$$180.818 - (33.382 + 146.25) = 180.818 - (157.5 + 22.132) = 1.186$$

8. Determinar el número de dientes de los engranajes de un reductor industrial cuya relación de transmisión es $\mu = \frac{133}{738}$, considerando que:
- El reductor industrial es un tren de engranajes ordinario y recurrente.
 - Una de las ruedas debe tener 41 dientes
 - Las cuatro ruedas dentadas han sido talladas normalizadamente, con una herramienta con un ángulo de presión de referencia $\alpha = 20^\circ$ y módulo $m = 5$,
 - Los dos grupos de engrane han sido montados a cero, con una distancia entre ejes $a = 137,5 \text{ mm}$.
 - La relación de transmisión máxima admitida por engrane es $\frac{1}{5} \leq \mu \leq 5$.
 - El número de dientes permitido es $14 < z < 100$.

Si se permitiera una relación de transmisión máxima de $\frac{1}{7} \leq \mu \leq 7$ y cumpliendo el resto de restricciones establecidas anteriormente, calcular el número de dientes de una pareja de ruedas cuya relación de transmisión presente un error absoluto menor de **0.0002** respecto a la dada $\mu = \frac{133}{738}$. (Tomar una precisión de 3 decimales)

NOTA: para este apartado considere que las ruedas no pueden tener más de 100 dientes, pero si pueden tener menos de 14 dientes ya que si esto ocurre, realizando talla y montaje este problema se podrá solucionar en el siguiente apartado.

Se pide rellenar la siguiente tabla para la pareja de ruedas obtenida en el apartado anterior, de manera que no tengas holgura circunferencial, usando una cremallera normalizada ($\alpha = 20^\circ$). Por condiciones de diseño, no se puede variar la distancia entre ruedas (no se puede realizar montaje en V).

Variable	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)		
Longitud de desplazamiento (x·m) (mm)		
Radio primitivo de referencia (r) (mm)		
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)		
Radio de cabeza (r _a) (mm)		
Radio de pie (r _f) (mm)		
Hueco (e) (mm)		
Espesor (s) (mm)		
Ángulo de presión de funcionamiento (✓') (°)		
Holgura radial (c') (mm)		

Solución:

- 1.- El reductor presenta una relación de transmisión $\mu = \frac{133}{738}$ y está compuesta por dos grupos reductores y se cumple:

$$\mu = \mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{133}{738} = \frac{7 \cdot 19}{18 \cdot 41} \Rightarrow \mu = \frac{2}{2} \cdot \frac{7 \cdot 19}{18 \cdot 41} = \frac{14 \cdot 19}{36 \cdot 41}$$

Para tener un piñón de al menos 14 dientes se multiplica por 2 tanto el numerador como el denominador.

Siendo el tren de engranajes ordinario y recurrente y conocida la distancia entre ejes a , se cumple que:

$$a = r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = 137.5 \text{ mm.} \Rightarrow a = \frac{m_1}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{m_2}{2} \cdot (Z_3 + Z_4)$$

Luego si asociamos debidamente se aprecia que:

$$a = 137,5 = \frac{5}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{5}{2} \cdot (Z_3 + Z_4) \Rightarrow Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 = 55 = 14 + 41 = 19 + 36$$

Lo cual verifica, además, la condición de que una rueda tiene 41 dientes.

También se podría obtener imponiendo:

$$a = 137,5 = \frac{5}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{5}{2} \cdot (Z_3 + Z_4) \rightarrow 165 \cdot \frac{2}{5} = 55 = Z_3 + Z_4 = Z_3 + 41 \rightarrow Z_3 = 14$$

Luego la solución sería:

$Z_1 = 14$ dientes; $Z_2 = 41$ dientes; $Z_3 = 19$ dientes; $Z_4 = 36$ dientes;

- 2.- Para hallar la relación de transmisión con una sola pareja de ruedas y un error absoluto menor de $2 \cdot 10^{-4}$ respecto a la dada $\mu = \frac{133}{738}$, se usa el método de descomposición en fracciones continuas hasta hallar una reducida que cumpla las especificaciones.

	5	1	1	4	1	1
73 8	13 3	73 60	13 8	8 5	5 3	
73	60	13	8	5	3	

$$R_1 = \frac{1}{5} = 0.2 \quad E_1 = |\mu - R_1| = |0.1802168 - 0.2| = 0.019 > 0.0002$$

$$R_2 = \frac{1}{5 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{6} = 0.16666666 \quad E_2 = |\mu - R_2| = 0.01 > 0.0002$$

$$R_3 = \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{2}{11} = 0.1818 \quad E_3 = |\mu - R_3| = 0.001 > 0.0002$$

$$R_4 = \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = \frac{9}{50} = 0.18 \quad E_4 = |\mu - R_4| = 0.000216 > 0.0002$$

$$R_5 = \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{11}{61} = 0.180327 \quad E_5 = |\mu - R_5| = 0.000111 < 0.0002$$

$$R_6 = \mu = \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{20}{111} = \quad E_6 = |\mu - R_6| < 0.0002$$

Las reducidas que provocan un error menor de 0.0002 son a partir de la quinta pero la sexta reducida no puede fabricarse (la rueda tiene más de 100 dientes) luego la pareja de ruedas que cumple con todas las especificaciones solicitadas será:

$$\mu' = \frac{11}{61}$$

- 3.- Como el grupo de engrane presenta un módulo $m = 5$ mm. y, como se vio en el apartado anterior, un piñón de $Z_1 = 11$ dientes y una rueda de $Z_2 = 61$ dientes, y como no puede haber montaje se tallara a +v-v. ($Z_1 + Z_2 = 80 > 28$)

Variable	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	11	61
Longitud de desplazamiento (x·m) (mm)	0.882	-0.882
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	27.5	152.5
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	27.5	152.5
Radio de cabeza (r _a) (mm)	33.382	156.618
Radio de pie (r _f) (mm)	22.132	145.368
Hueco (e) (mm)	7.212	8.496
Espesor (s) (mm)	8.496	7.212
Ángulo de presión de funcionamiento (✓') (º)	20	
Holgura radial (c') (mm)	1.25	

La holgura radial se extrae restándole a la distancia entre ejes de funcionamiento el radio de cabeza de una de las ruedas y el radio de pie de la otra:

$$180 - (33.382 + 145.368) = 180 - (156.618 + 22.132) = 1.25$$

9. Determinar el número de dientes de los engranajes de un reductor industrial cuya relación de transmisión es $\mu = \frac{85}{533}$, considerando que:
- El reductor industrial es un tren de engranajes ordinario y recurrente.
 - Las cuatro ruedas dentadas han sido talladas normalizadamente, con una herramienta con un ángulo de presión de referencia $\alpha = 20^\circ$ y módulo $m = 5$,
 - Los dos grupos de engrane han sido montados a cero, con una distancia entre ejes $a = 140$ mm.
 - La relación de transmisión máxima admitida por engrane es $\frac{1}{5} \leq \mu \leq 5$.
 - El número de dientes permitido es $11 \leq Z \leq 100$.

Si se permitiera una relación de transmisión máxima de $\frac{1}{7} \leq \mu \leq 7$ y cumpliendo el resto de restricciones establecidas anteriormente, calcular el número de dientes de una pareja de ruedas cuya relación de transmisión presente un error absoluto menor de 10^{-4} respecto a la dada $\mu = \frac{85}{533}$.

Debido a problemas en el reductor del punto 1, se decide aumentar la distancia entre ejes en 1 mm. ($a' = 141$ mm) pero respetando el módulo. Para evitar la holgura circunferencial en el grupo reductor cuya rueda tiene 41 dientes, se decide tallar el piñón con desplazamiento positivo, usando una cremallera normalizada ($\alpha = 20^\circ$).

Se pide rellenar la siguiente tabla:

Variable	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)		41
Longitud de desplazamiento (x·m) (mm)	1	0
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)		
Radio de cabeza (r _a) (mm)		
Radio de pie (r _f) (mm)		
Hueco (e) (mm)		
Espesor (s) (mm)		
Ángulo de presión de funcionamiento (α') (°)		
Holgura radial (c') (mm)		
Espesor en la circunferencia de cabeza (mm)		

Solución al PROBLEMA

- 1.- El reductor presenta una relación de transmisión $\mu = \frac{85}{533}$ y está compuesta por dos grupos reductores y se cumple:

$$\mu = \mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{85}{533} = \frac{5 \cdot 17}{13 \cdot 41} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{3}{3} \cdot \frac{5 \cdot 17}{13 \cdot 41} = \frac{15 \cdot 17}{39 \cdot 41}$$

Para tener un piñón de al menos 11 dientes se multiplica por 3 tanto el numerador como el denominador.

Siendo el tren de engranajes ordinario y recurrente y conocida la distancia entre ejes a , se cumple que:

$$a = r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = 140 \text{ mm.} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_1}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{m_2}{2} \cdot (Z_3 + Z_4)$$

Luego si asociamos debidamente se aprecia que:

$$a = 140 = \frac{5}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{5}{2} \cdot (Z_3 + Z_4) \quad \Rightarrow \quad Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 = 56 = 15 + 41 = 17 + 39$$

Lo cual verifica, además, la condición de que una rueda tiene 41 dientes.

Luego una solución sería:

$$Z_1 = 15 \text{ dientes;} \quad Z_2 = 41 \text{ dientes;} \quad Z_3 = 17 \text{ dientes;} \quad Z_4 = 39 \text{ dientes;}$$

- 2.- Para hallar la relación de transmisión con una sola pareja de ruedas y un error absoluto menor de 10^{-4} respecto a la dada $\mu = \frac{85}{533}$, se usa el método de descomposición en fracciones continuas hasta hallar una reducida que cumpla las especificaciones.

	6	3	1	2	3	2
53 3	85	23	16	7	2	1
23	16	7	2	1	0	

$$R_1 = \frac{1}{6} = 0.16666667 \quad E_1 = |\mu - R_1| = |0.15947467 - 0.16666667| = 7.19 \cdot 10^{-3} > 10^{-4}$$

$$R_2 = \frac{1}{6 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{19} = 0.15789474 \quad E_2 = |\mu - R_2| = 1.57 \cdot 10^{-3} > \Leftrightarrow 10^{-4}$$

$$R_3 = \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = \frac{4}{25} = 0.16 \quad E_3 = |\mu - R_3| = 5.25 \cdot 10^{-4} > 10^{-4}$$

$$R_4 = \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{11}{69} = 0.15942029 \quad E_4 = |\mu - R_4| = 5.4 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

$$R_5 = \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{37}{232} = 0.15948276 \quad E_5 = |\mu - R_5| = 8.09 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}$$

$$R_6 = \mu = \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}}} = \frac{85}{533} = 0.15947467 \quad E_6 = |\mu - R_6| = 0$$

Las reducidas que provocan un error menor de 10^{-4} son la cuarta y la quinta pero la quinta reducida no puede fabricarse (la rueda tiene más de 100 dientes) luego la pareja de ruedas que cumple con todas las especificaciones solicitadas será:

$$\Leftrightarrow \mu' = \frac{11}{69}$$

- 3.- Como el grupo de engrane presenta un módulo $m = 5$ mm. y, como se vio en el apartado 1, un piñón de $Z_1 = 15$ dientes y una rueda de $Z_2 = 41$ dientes, sus radios primitivos de referencia son:

$$r_1 = \frac{m_1 \cdot Z_1}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{5 \cdot 15}{2} \Rightarrow r_1 = 37.5 \text{ mm.}$$

$$r_2 = \frac{m_1 \cdot Z_2}{2} \Rightarrow r_2 = \frac{5 \cdot 41}{2} \Rightarrow r_2 = 102.5 \text{ mm.}$$

Como la nueva distancia entre ejes de funcionamiento es $a' = 141$ mm. y esta no coincide con la del montaje de referencia, obliga a realizar un montaje en V, con un nuevo ángulo de presión de funcionamiento α' que puede ser determinado como:

$$a' = r_1' + r_2' = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot (r_1 + r_2) = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot a$$

$$\alpha' = \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1' + r_2'} \cdot \cos \alpha \right) = \left(\frac{140}{141} \cdot \cos 20^\circ \right) \Rightarrow \alpha' = 21.09^\circ$$

Los radios primitivos funcionamiento son:

$$r_1' = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot r_1 = \frac{a'}{a} \cdot r_1 \Rightarrow r_1' = \frac{141}{140} \cdot 37.5 \Rightarrow r_1' = 37.77 \text{ mm.}$$

$$r_2' = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot r_2 = \frac{a'}{a} \cdot r_2 \Rightarrow r_2' = \frac{141}{140} \cdot 102.5 \Rightarrow r_2' = 103.23 \text{ mm.}$$

Las dos ruedas son talladas con una cremallera normalizada ($\alpha = 20^\circ$) y como el grupo de engrane debe estar montado asegurando que no haya holgura circunferencial, se debe efectuar un montaje en V donde el ángulo de contacto en funcionamiento debe cumplir la igualdad:

$$Ev\alpha' = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \tan \alpha + Ev\alpha$$

De esta expresión se puede despejar el valor de la suma de los coeficientes de desplazamiento en la talla:

$$x_1 + x_2 = \frac{Z_1 + Z_2}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot (Ev\alpha' - Ev\alpha) \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{15 + 41}{2 \cdot \tan 20^\circ} \cdot (Ev21.09^\circ - Ev20^\circ)$$

$$x_1 + 0 = \frac{56}{0.728} (0.017577 - 0.014904) \Rightarrow x_1 = 0.2056 \text{ mm.}$$

Este procedimiento sería el correcto para calcular el factor de desplazamiento en la talla del piñón y el desplazamiento en la talla sería $x_1 \cdot m = 0.2056 \cdot 5 = 1.028 \text{ mm.}$

Aunque el factor de desplazamiento se podría determinar a partir del valor dado en la tabla, es decir, $x_1 \cdot m = 1 \text{ mm.} \Rightarrow x_1 = 0.2$, este cálculo no es el exacto.

Como las ruedas se han tallado normalizadamente, el radio de cabeza y de pie pueden calcularse como:

$$r_{a1} = r_1 + (1 + x_1) \cdot m \quad r_{a2} = r_2 + m$$

$$r_{a1} = 37.5 + (1 + 0.2056) \cdot 5 = 43.53 \text{ mm.}$$

$$r_{a2} = 102.5 + 5 = 107.5 \text{ mm.}$$

$$r_{f1} = r_1 - (1 + c - x_1) \cdot m \quad r_{f2} = r_2 - (1 + c) \cdot m \quad \text{siendo } c = 0.25$$

$$r_{f1} = 37.5 - (1 + 0.25 - 0.2056) \cdot 5 = 32.28 \text{ mm.}$$

$$r_{f2} = 102.5 - (1 + 0.25) \cdot 5 = 96.25 \text{ mm.}$$

Evidentemente, para que engranen, el piñón y la rueda tienen el mismo paso. El paso resulta de la suma del espesor y el hueco y puede calcularse como:

$$p = m \cdot \pi \Rightarrow p = 5 \cdot \pi = 15.708 \text{ mm.}$$

Siendo el espesor del piñón y la rueda:

$$s_1 = \frac{p}{2} + 2 \cdot m \cdot x_1 \cdot \tan \alpha \Rightarrow s_1 = \frac{15.708}{2} + 2 \cdot 5 \cdot 0.2056 \cdot \tan 20^\circ = 8.60 \text{ mm.}$$

$$s_2 = \frac{p}{2} \Rightarrow s_2 = \frac{15.708}{2} = 7.854 \text{ mm.}$$

Y el hueco:

$$e_1 = \frac{p}{2} - 2 \cdot m \cdot x_1 \cdot \tan \alpha \Rightarrow e_1 = \frac{15.708}{2} - 2 \cdot 5 \cdot 0.2056 \cdot \tan 20^\circ = 7.11 \text{ mm.}$$

$$e_2 = \frac{p}{2} \Rightarrow e_2 = \frac{15.708}{2} = 7.854 \text{ mm.}$$

La holgura radial se extrae restándole a la distancia entre ejes de funcionamiento el radio de cabeza de una de las ruedas y el radio de pie de la otra:

$$Holgura radial = a' - (r_{a1} + r_{f2}) = a' - (r_{a2} + r_{f1})$$

$$Holgura radial = 141 - (43.53 + 96.25) = 141 - (107.5 + 32.28) = 1.22 \text{ mm.}$$

Para conocer el ángulo desarrollado por la evolvente en una circunferencia de radio r_x ($r_x \geq r_b$) se aplica la fórmula:

$$\alpha_x = \arccos \cos \left(\frac{r_b}{r_x} \right) = \arccos \cos \left(\frac{r \cdot \cos \alpha}{r_x} \right)$$

$$\alpha_{a1} = \arccos \cos \left(\frac{r_1 \cdot \cos \alpha}{r_{a1}} \right) = \arccos \cos \left(\frac{37.5 \cdot \cos 20^\circ}{43.53} \right) = 35.95^\circ$$

$$\alpha_{a2} = \arccos \cos \left(\frac{r_2 \cdot \cos \alpha}{r_{a2}} \right) = \arccos \cos \left(\frac{102.5 \cdot \cos 20^\circ}{107.5} \right) = 26.36^\circ$$

y los espesores de los dientes pueden calcularse a partir de la expresión:

$$S_x = 2 \cdot r_x \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot Z} + \frac{2 \cdot x}{Z} \cdot \tan \alpha + \text{Ev} \alpha - \text{Ev} \alpha_x \right)$$

Para el caso del piñón, $x_1 = 0.2056$

$$S_{a1} = 2 \cdot 43.53 \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot 15} + \frac{2 \cdot 0.2056}{15} \cdot \tan 20^\circ + \text{Ev} 20^\circ - \text{Ev} 35.95^\circ \right) = 2.77 \text{ mm.}$$

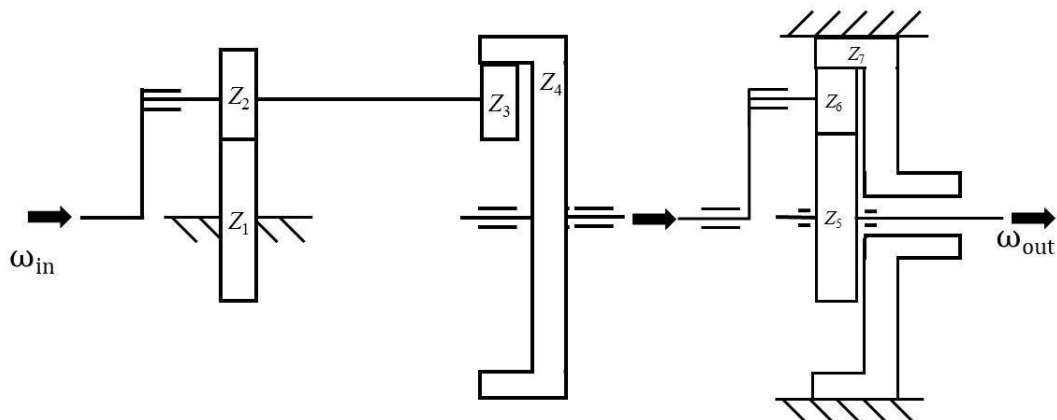
Para el caso de la rueda, $x_2 = 0$

$$S_{a2} = 2 \cdot 107.5 \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot 41} + \frac{2 \cdot 0}{41} \cdot \tan 20^\circ + \text{Ev} 20^\circ - \text{Ev} 26.36^\circ \right) = 3.82 \text{ mm.}$$

Finalmente, la tabla rellena con todos los parámetros solicitados es:

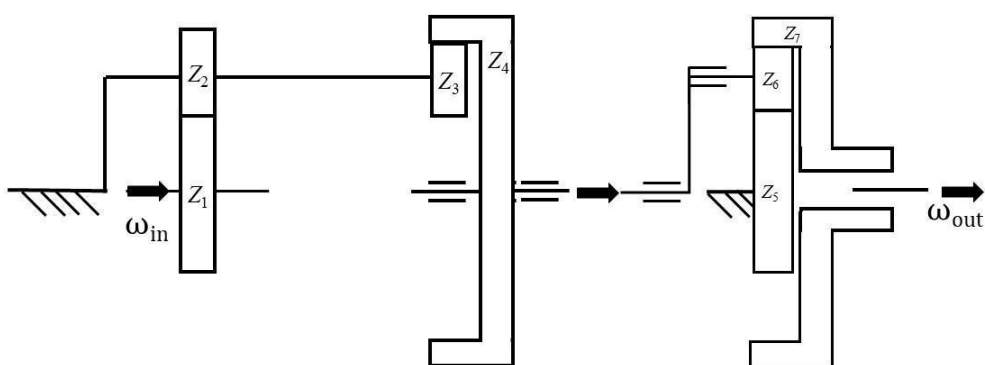
Variable	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	15	41
Longitud de desplazamiento (x·m) (mm)	1.028	0
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	37.77	103.23
Radio de cabeza (r _a) (mm)	43.53	107.5
Radio de pie (r _f) (mm)	32.28	96.25
Hueco (e) (mm)	7.11	7.854
Espesor (s) (mm)	8.60	7.854
Ángulo de presión de funcionamiento (α') °	21.09	
Holgura radial (c') (mm)	1.22	
Espesor en la circunferencia de cabeza (mm)	2.77	3.82

10. Calcule la transmisión total (ω_{out}/ω_{in}) de la caja de cambios formada por los dos trenes epicicloidales recurrentes consecutivos de la figura. La velocidad de entrada, ω_{in} , coincide con la velocidad del brazo del primer tren, y la velocidad de salida de éste coincide con la velocidad del brazo del segundo tren. La velocidad de salida coincide con la velocidad del engranaje 5 (ω_5). Se conocen los números de dientes: $Z_1 = 60$; $Z_2 = 30$; $Z_3 = 15$; $Z_4 = 60$; $Z_5 = 60$; $Z_7 = 80$. EL módulo de las ruedas 1 y 2 (Z_1 y Z_2) es 5. En la configuración de la figura el engranaje 1 de la primera etapa (Z_1) está fijo y la corona de la tercera etapa (ω_7) esta fija.



Módulo de los engranajes 3 y 4	
Número de dientes del engranaje 6	
Relación de transmisión aparente de la primera etapa	
Relación de transmisión aparente de la segunda etapa	
Relación de transmisión total (ω_{out}/ω_{in})	

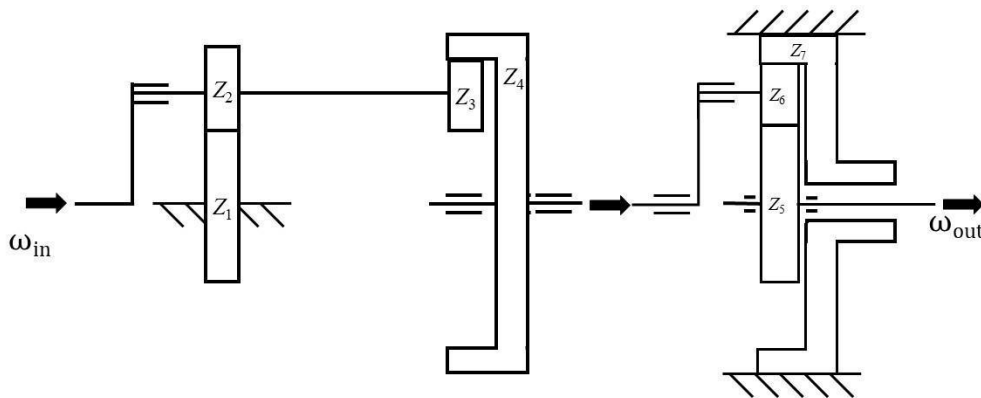
Si se cambia de marcha, como se muestra en la siguiente figura. Calcule la nueva relación de transmisión cuando se ha bloqueado el brazo del primer tren y el engranaje 5 (sol) del segundo tren.



Relación de transmisión primera etapa	
Relación de transmisión segunda etapa	
Relación de transmisión total (ω_{out}/ω_{in})	

solución:

Calcule la transmisión total (ω_{out}/ω_{in}) de la caja de cambios formada por los dos trenes epicicloidales recurrentes consecutivos de la figura. La velocidad de entrada, ω_{in} , coincide con la velocidad del brazo del primer tren, y la velocidad de salida de éste coincide con la velocidad del brazo del segundo tren. La velocidad de salida coincide con la velocidad del engranaje 5 (ω_5). Se conocen los números de dientes: $Z_1 = 60$; $Z_2 = 30$; $Z_3 = 15$; $Z_4 = 60$; $Z_5 = 60$; $Z_7 = 80$. EL módulo de las ruedas 1 y 2 (Z_1 y Z_2) es 5. En la configuración de la figura el engranaje 1 de la primera etapa (Z_1) está fijo y la corona de la tercera etapa (ω_7) esta fija.



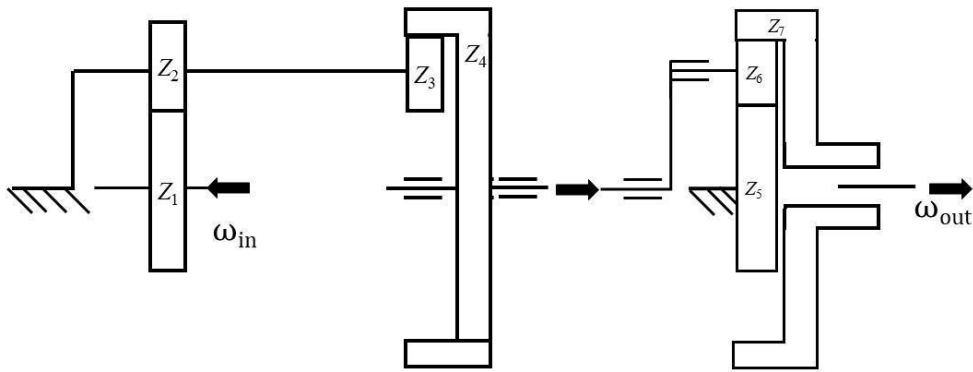
Módulo de los engranajes 3 y 4	10
Número de dientes del engranaje 6	10
Relación de transmisión aparente de la primera etapa	$-5/10 = -1/2 = -0.5$
Relación de transmisión aparente de la segunda etapa	$-6/8 = -0,75$
Relación de transmisión total (ω_{out}/ω_{in})	$7/2 = 3,5$

Son dos trenes recurrentes $\frac{5}{2}(Z_1 + Z_2) = \frac{m}{2}(-Z_3 + Z_4)$ **M=10** **$Z_6 = 10$**

$$\mu_{a1} = \frac{w_4 - w_{in}}{0 - w_{in}} = \left(-\frac{Z_4}{Z_5}\right) \cdot \left(\frac{Z_6}{Z_7}\right) = -5/10 = -0.5$$

$$\mu_{a2} = \frac{0 - w_4}{w_{out} - w_4} = -\frac{Z_5}{Z_7} = -6/8$$

Si se cambia de marcha, como se muestra en la siguiente figura. Calcule la nueva relación de transmisión cuando se ha bloqueado el brazo del primer tren y el engranaje 5 del segundo tren.



Relación de transmisión primera etapa	$-5/10 = -1/2 = -0,5$
Relación de transmisión segunda etapa	$1 - \mu_{a2} = 14/8 = 1,75$
Relación de transmisión total (ω_{out}/ω_{in})	$-7/8 = -0,875$

De la primera etapa:

$$\frac{w_4}{w_{in}} = 1 - \mu_a$$

$$\frac{w_4}{w_{in}} = 15/10$$

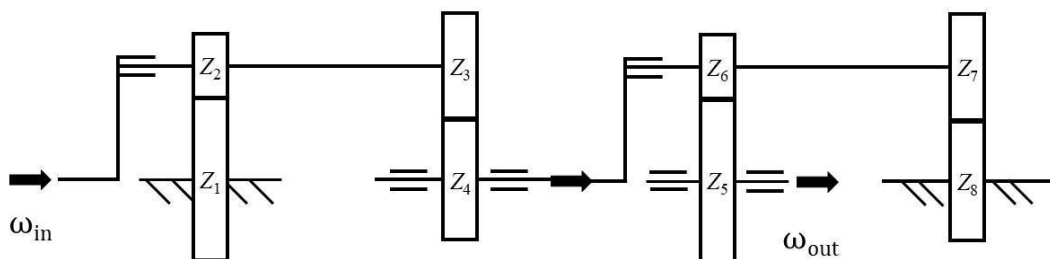
De la segunda etapa:

$$\frac{w_{out}}{w_4} = (\mu_a - 1)/\mu_a = 7/3$$

Juntando:

$$\frac{w_{out}}{w_{in}} = \frac{w_{out}}{w_{paso}} \cdot \frac{w_{paso}}{w_{in}} = -8/3$$

11. Sea una caja de cambios formada por dos trenes epicicloidales recurrentes como la descrita en la figura. Del primer tren se sabe que la relación de transmisión aparente, μ_a , es 9 y del segundo tren es conocido el número de dientes del engranaje $Z_5 = 15$ y el número de dientes de los engranajes $Z_6 = Z_8 = 40$. Todos los engranajes tienen el mismo modulo ($m=3$). Calcule:



Número de dientes del engranaje siete	
---------------------------------------	--

Relación de transmisión aparente de la segunda etapa (μ_{A2})	
La relación de transmisión (ω_z/ω_b) de la primera etapa, considerando el eje de entrada fijo ($\omega_o=0$)	
La relación de transmisión (ω_o/ω_b) de la segunda etapa, considerando el eje de salida fijo ($\omega_z=0$)	
La relación de transmisión de la caja de cambios (ω_{out}/ω_{in})	

Por problemas de funcionamiento se decide sustituir el piñón de la segunda pareja de ruedas de la segunda etapa por uno (Z_5 y Z_6) por uno de menor tamaño de $Z_5=9$. Calcula el nuevo módulo que debe aplicarse en esa pareja para garantizar las condiciones de funcionamiento y si todas las ruedas han sido talladas usando una cremallera normalizada ($\alpha=20^\circ$), complete la siguiente tabla para la nueva pareja de ruedas (Z_5 y Z_6) garantizando las condiciones de funcionamiento (forma parte de un tren de engranajes recurrente).

Nuevo módulo en la pareja (Z_5 y Z_6)	
---	--

PARAMETROS	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)		
Factor de desplazamiento (x)		
desplazamiento de la talla (x·m) (mm)		
Radio primitivo de referencia (r) (mm)		
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)		
Ángulo de presión de funcionamiento (α') (°)		

solución

Número de dientes del engranaje siete	$Z_7 = 15$
Relación de transmisión aparente de la segunda etapa (μ_{A2})	$\mu_{A2} = \left(-\frac{Z_5}{Z_6}\right) \cdot \left(-\frac{Z_7}{Z_8}\right) = \left(\frac{15}{40}\right) \cdot \left(\frac{15}{40}\right) = \frac{225}{1600} =$
La relación de transmisión (ω_z/ω_b) de la primera etapa, considerando el eje de entrada fijo ($\omega_o=0$)	$\left(\frac{\omega_z}{\omega_b}\right)_{1\text{ etapa}} = 1 - \mu_{A1} = -8$
La relación de transmisión (ω_o/ω_b) de la segunda etapa, considerando el eje de salida fijo ($\omega_z=0$)	$\left(\frac{\omega_o}{\omega_b}\right)_{2\text{ etapa}} = (\mu_{A2} - 1)/\mu_{A2} = \frac{-1375}{225} = -\frac{55}{9}$
La relación de transmisión de la caja de cambios (ω_{out}/ω_{in})	$\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} = \left(\frac{\omega_z}{\omega_b}\right)_1 \cdot \left(\frac{\omega_z}{\omega_b}\right)_2 = \frac{-1375 \cdot 8}{225} = -\frac{55}{9}$

Nuevo módulo en la pareja (Z_5 y Z_6)	5
---	---

PARAMETROS	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)	9	24
Factor de desplazamiento (x)	0.294	-0.294
desplazamiento de la talla (x·m) (mm)	1.471	-1.471
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	22.5	60
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	22.5	60
Ángulo de presión de funcionamiento (α') (°)	20	