

OpenCourseWare
Teoría de Máquinas

CRISTINA CASTEJÓN, EDUARDO CORRAL, RAUL GISMEROS, MARIA JESUS GÓMEZ,
JESUS MENESES, HIGINIO RUBIO, ABRAHAM VADILLO

Regulación de Maquinaria: Volantes de Inercia



Índice

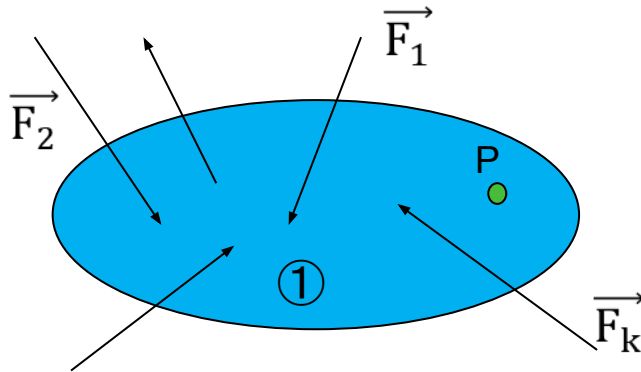
- Introducción
 - Equivalente dinámico y energético de un mecanismo
 - Teorema de las fuerzas vivas.
- Variaciones cíclicas de velocidad
- Volante de inercia.
- Cálculo de un volante de inercia.
 - Método aproximado
 - Método aproximado rectificado
 - Método exacto
- Regulación de Máquinas

Introducción

Diagrama de cuerpo libre sobre un eslabón o mecanismo

- En el eslabón ① de un mecanismo, **en un instante t**, hay equilibrio dinámico

Principio de superposición



$$\text{sol. total} = \sum_i \text{sol. parciales} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1 \Rightarrow \left\{ \vec{R}_{1P}, \vec{M}_{\vec{F}_1 \text{ en } P} \right\} \\ \vec{F}_2 \Rightarrow \left\{ \vec{R}_{2P}, \vec{M}_{\vec{F}_2 \text{ en } P} \right\} \\ \vdots \\ \vec{F}_k \Rightarrow \left\{ \vec{R}_{kP}, \vec{M}_{\vec{F}_k \text{ en } P} \right\} \end{array} \right.$$

Siendo i el número de fuerzas actuantes

Reducción del sistema de fuerzas en un punto P

$$\vec{R}_P = \sum_{i=1}^k \vec{R}_{iP}$$
$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^k \vec{M}_{\vec{F}_i \text{ en } P}$$

Introducción: Mecanismo dinámicamente equivalente

- Si un sistema mecánico no está en equilibrio, en un instante t:

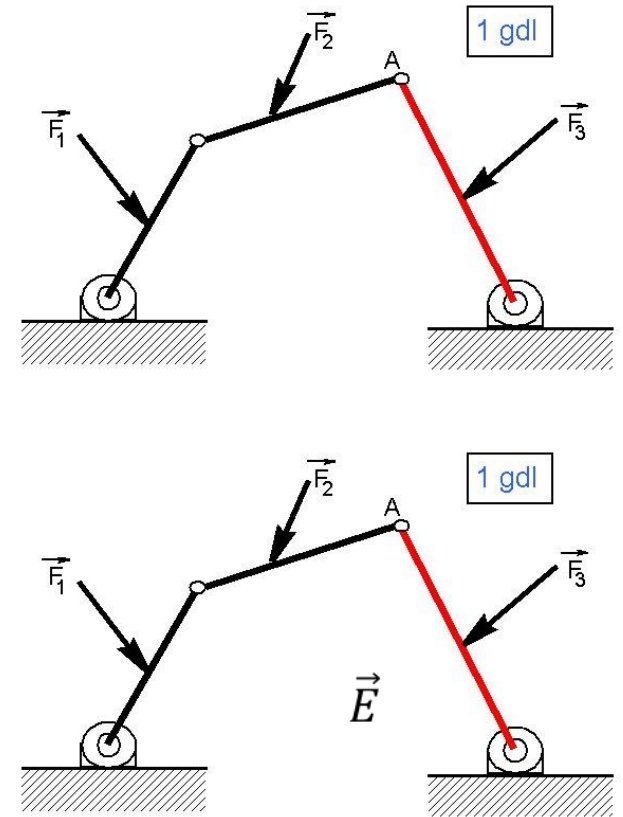
$$\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{P_i} \neq 0$$

- Si se quiere calcular la fuerza E que habría que aplicar en un punto A de un eslabón dado para lograr el equilibrio, se debe cumplir que (principio de los trabajos virtuales)

$$\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{P_i} + \vec{E} \cdot \vec{v}_A = 0$$

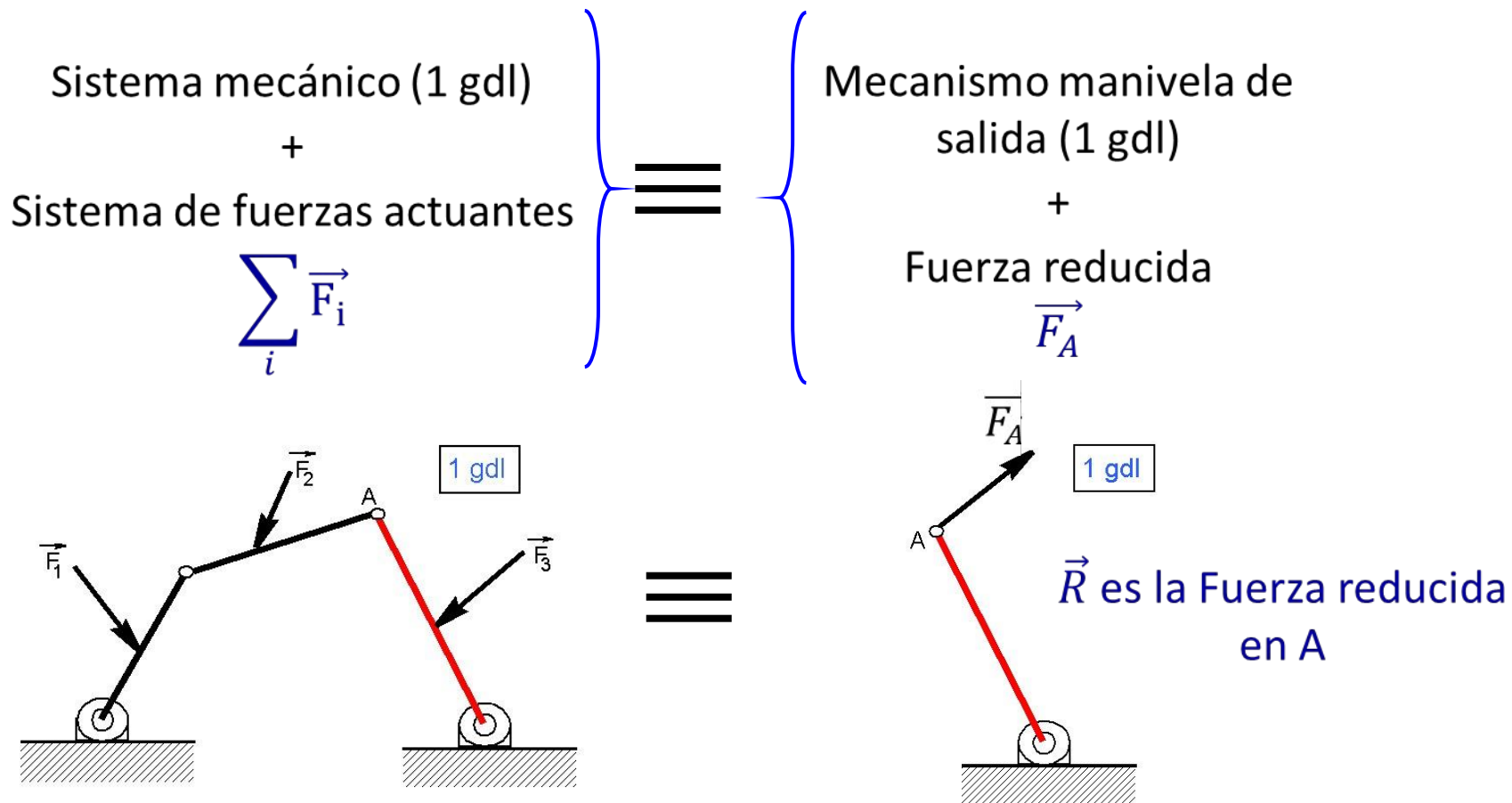
- De esta manera se define la fuerza reducida R en ese mismo punto A como la equivalente de las fuerzas que actúan en ese punto y produce el mismo trabajo.

$$\vec{F}_A = -\vec{E}$$



Introducción: Equivalente dinámico y energético de un mecanismo

Esfuerzos en los mecanismos de un grado de libertad: Análisis de la energía cinética en mecanismos. Transmisión de fuerzas en mecanismos. Caso de 1gdl.



Sistemas equivalentes energéticamente:

El trabajo instantáneo producido por la fuerza reducida en el punto de reducción A es el mismo que el producido por el sistema de fuerzas actuantes (externas)

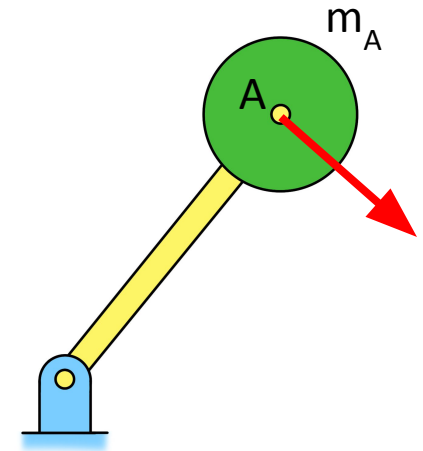
Energía cinética de un mecanismo. Masa reducida

La dinámica del mecanismo de 1 g.d.l.: $[\vec{F}_i, i] \rightarrow [\vec{F}_A, A]$

La dinámica del mecanismo es reproducida por el modelo dinámico reducido en A.

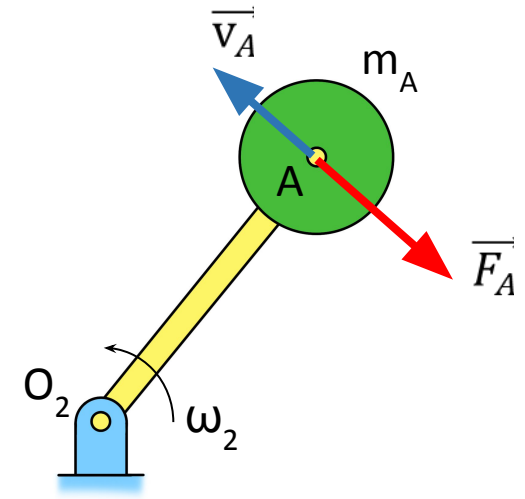
Estudio energético comparado del mecanismo y su reducción

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cinetica}}^{\text{Mecanismo}} &= \sum_i E_{\text{cinetica}}^{\text{eslabones}} & i = j + k = j + k_1 + k_2 \\
 E_{\text{cinetica}}^{\text{Mecanismo}} &= \sum_j E_{\text{cinetica}}^{\text{manivelas}} + \sum_k E_{\text{cinetica}}^{\text{bielas}} \\
 E_{\text{cinetica}}^{\text{Mecanismo}} &= \sum_j E_{\text{cinetica}}^{\text{manivelas}} + \sum_{k_1} E_{\text{cinetica}}^{\text{bielas traslacion}} + \sum_{k_2} E_{\text{cinetica}}^{\text{bielas tras+rot}}
 \end{aligned}$$



Equivalente dinámico/energético de un mecanismo de 1gdl

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{cinetica\ Mecanismo} &= \sum_j E_{cinetica\ manivelas} + \sum_{k_1} E_{cinetica\ bielas\ traslacion} + \sum_{k_2} E_{cinetica\ bielas\ tras+rot} \\
 E_{cinetica\ Mecanismo} &= \sum_j \frac{1}{2} I_{Oj} \omega_j^2 + \sum_{k_1} \frac{1}{2} m_{biela} V_{k_1}^2 + \left(\sum_{k_2} \frac{1}{2} m_{biela} V_{G_{k_2}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k_2} I_{G_{k_2}} \omega_{k_2}^2 \right) \\
 E_{cinetica\ Mecanismo\ reducidoA} &= \frac{1}{2} m_A \cdot V_A^2 \quad m_A = 2 \cdot \frac{E_{cinetica\ Mecanismo}}{V_A^2} \\
 m_A &= \sum_{k_1, k_2} m_{bielas} \left(\frac{V_G}{V_A} \right)^2 + \sum_j I_{Oj} \left(\frac{\omega_j}{V_A} \right)^2 + \sum_{k_2} I_{G_{k_2}} \left(\frac{\omega_{k_2}}{V_A} \right)^2
 \end{aligned}$$



Dado un mecanismo, la **masa reducida** y el **momento de inercia** reducido al eje principal son independientes de la velocidad adquirida.

$$m_A = f \left(\frac{V_G}{V_A} \right)$$

$$I_R = \frac{V_A^2 \cdot m_A}{\omega^2} = M_A \cdot r^2$$

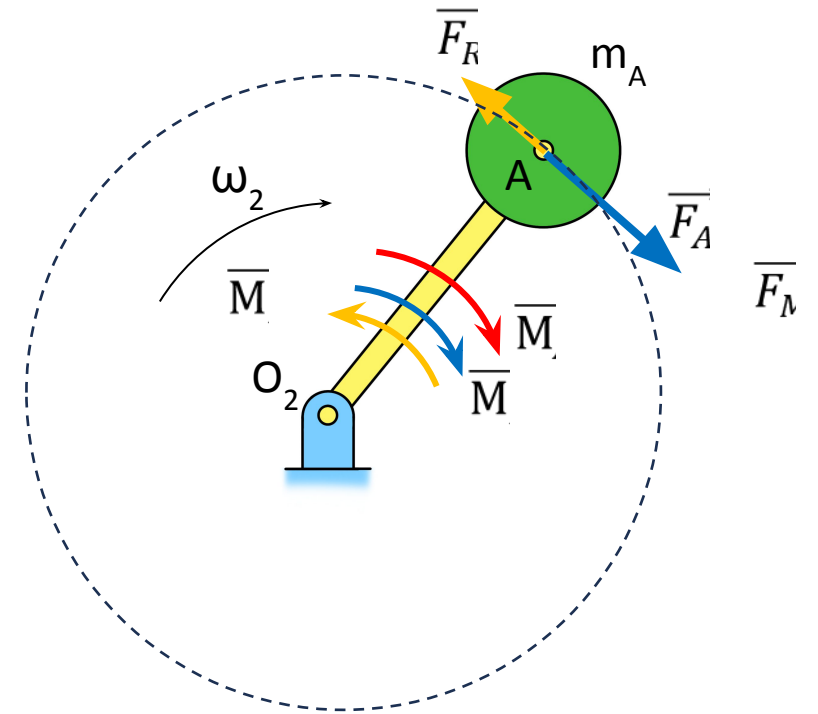
Equivalente dinámico/energético de un mecanismo de 1gdl

- Balance de fuerzas reducidas en A: $\vec{F}_A = \vec{F}_{M_A} - \vec{F}_{R_A}$

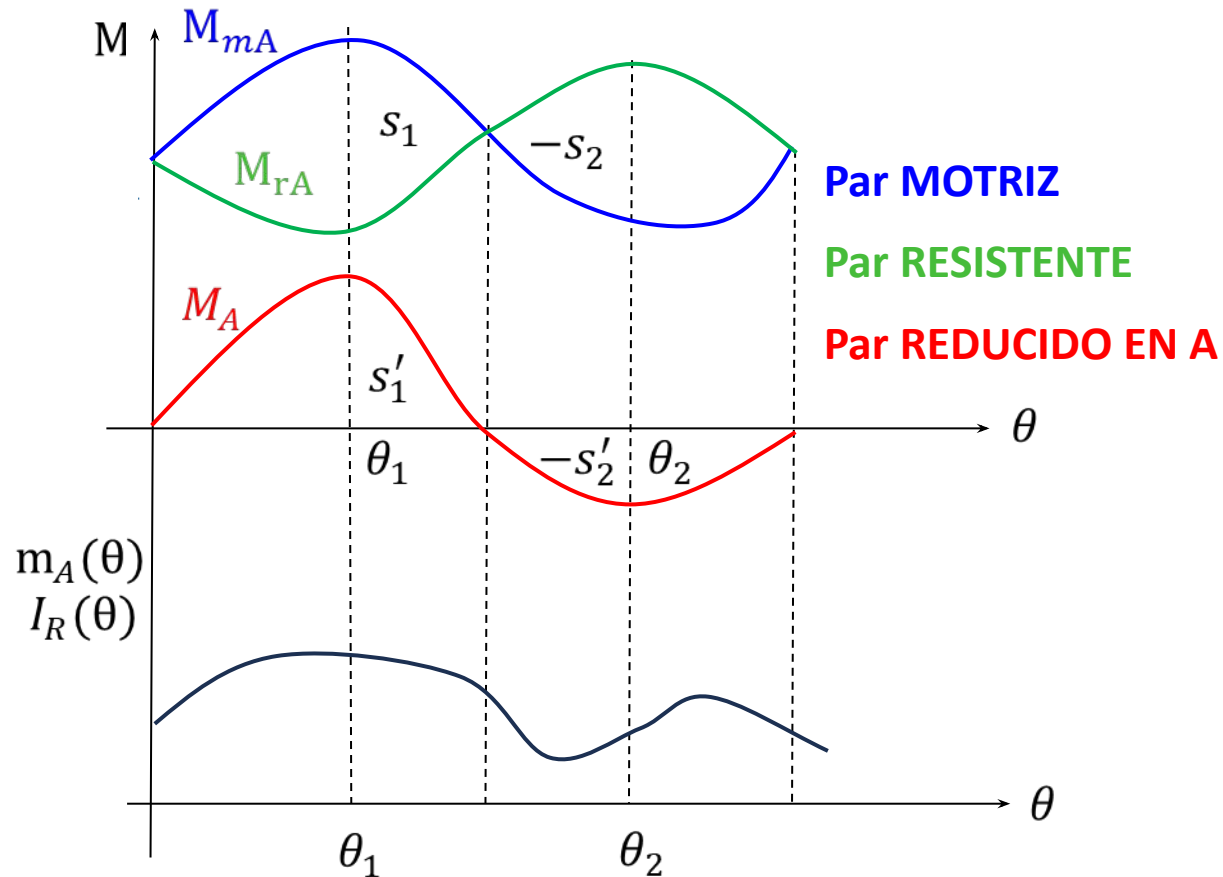
- $\vec{F}_{M_A}$: Reducida de los esfuerzos motrices
- $\vec{F}_{R_A}$: Reducida de los esfuerzos resistentes

- Balance de pares reducidos en A:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_{M_A} - \vec{M}_{R_A}$$



Análisis del mecanismo en el punto A de la manivela de salida



Momento de inercia de una masa m_A situada a una distancia L de su centro de rotación:

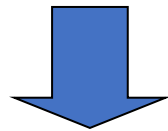
$$I_R(\theta) = m_A(\theta) \cdot L^2$$

- Teorema de las Fuerzas vivas: El trabajo desarrollado $\Delta\tau$ desde el instante θ_1 a θ_2 , es igual a la variación de la energía cinética.

$$\begin{aligned}
 \Delta\tau &= s_1 - s_2 = s'_1 - s'_2 = E_{c2} - E_{c1} = \\
 &= \frac{1}{2} m_A(\theta_2) V_{A2}^2 - \frac{1}{2} m_A(\theta_1) V_{A1}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} I_R(\theta_2) \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_R(\theta_1) \omega_1^2
 \end{aligned}$$

Variaciones cíclicas de velocidad

- En el ciclo de una máquina, el **par reducido** ($\overrightarrow{M_A}$) no se mantiene constante, sino que varía según el tipo de máquina. Esta variación hace que el **trabajo desarrollado** en cada instante no sea constante, y por lo tanto tampoco la **energía cinética** del sistema (t. fuerzas vivas).
- La variación de energía cinética provoca alteraciones en la **velocidad angular** del movimiento de la manivela reducida y por lo tanto provoca variaciones en la **aceleración** que modifican los **esfuerzos de inercia** de los distintos miembros.
- El movimiento de una máquina, en general, durante un ciclo no puede ser uniforme.



CADA POSICIÓN DE LA MÁQUINA TIENE UN ESTADO
DINÁMICO DISTINTO

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_{M_A}} - \overrightarrow{M_{R_A}}$$

potencia desarrollada en un instante dado:

$$W = M_A \cdot \omega = F_A \cdot V_A$$

Si $\Delta\tau \neq \text{cte}$, varía la energía cinética $\Delta E_c \rightarrow$ varía la velocidad angular $\omega \rightarrow$ hay aceleración angular $\epsilon \neq 0$

Aplicación del Teorema de las Fuerzas Vivas aplicado a máquinas cíclicas

El incremento de energía cinética de todos los eslabones del mecanismo es igual al trabajo de todas las fuerzas exteriores aplicadas en los eslabones del mecanismo.

(MECANISMO DE 1 GDL) Aplicando el teorema de las fuerzas vivas al sistema reducido en la cabeza de la manivela de salida:

$$T_{1-2} = \Delta T = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2$$

Para un desplazamiento angular infinitamente pequeño $d\varphi$:

$$M \cdot d\varphi = \frac{1}{2} d(I \cdot \omega^2) \rightarrow M = \frac{1}{2} \frac{d(I \cdot \omega^2)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{dI}{d\varphi} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} I \cdot 2 \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}$$

$$M = \frac{1}{2} \omega \frac{dI}{dt} + I \cdot \epsilon \rightarrow \mathbf{M = M_m - M_r = I \cdot \epsilon}$$

influencia de la inercia en la máquina debido a la disposición de las masas en cada instante (En la mayoría de los casos es despreciable respecto al segundo sumando)

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{\omega} \cdot \epsilon \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{dI}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \frac{dI}{d\varphi} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

Para que el movimiento sea uniforme: $\epsilon = 0$
Entonces el par motor debe ser igual al resistente, a lo largo de todos los puntos del ciclo. $\mathbf{M_m - M_r = 0}$

Máquina en régimen permanente

- Por lo tanto, el movimiento de la máquina no podrá ser absolutamente uniforme, la velocidad de la máquina variará entre unos valores máximos y mínimos alrededor de la velocidad de régimen.
- La máquina está **en régimen permanente** cuando la velocidad media es la misma en los sucesivos ciclos (ϕ). Dando lugar a la **repetición del ciclo de funcionamiento** implica que:

$$I_{\phi} = I_0 \text{ y } \omega_{\phi} = \omega_0$$

- Se cumple la **ecuación de permanencia en régimen de una máquina**, si en el conjunto del ciclo, el trabajo producido por el par motor reducido es igual al trabajo producido por el par resistente reducido.

$$T_{\phi} = \int_0^{\phi} M \cdot d\phi = E_{\phi} - E_0 = \frac{1}{2} I_{\phi} \cdot \omega_{\phi}^2 - \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega_0^2 = 0$$

Def. La velocidad media de la maquina en régimen permanente será: $\omega_m = \frac{\int_0^{\phi} \omega \cdot d\phi}{\phi}$

Variaciones cíclicas de la velocidad

- Durante el ciclo de la máquina la energía cinética varía
- La velocidad del eje principal no es constante, sino que oscila entre un valor mínimo $\omega_{\min}$ y máximo $\omega_{\max}$ dentro de cada ciclo, aunque su valor medio ω_m si es constante entre ciclos.

$$\text{Valor por definición } \omega_m = \frac{\int_0^\phi \omega \cdot d\phi}{\phi}$$

- Como los valores máximo y mínimo de la velocidad difieren poco entre sí, en vez de usar el valor exacto se tomará

$$\omega_m = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$$

- Se llamará **grado de irregularidad** a la expresión $\rightarrow \delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m}$

Grado de irregularidad

- A partir de la **velocidad media en régimen** y del ***grado de irregularidad*** podemos obtener los valores máximos y mínimos de la velocidad.

$$\omega_{\max} = \omega_m \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \quad \omega_{\min} = \omega_m \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$$

- El ***grado de irregularidad*** mide la desviación relativa que experimentará la velocidad media.
 - Su valor depende del uso de la máquina

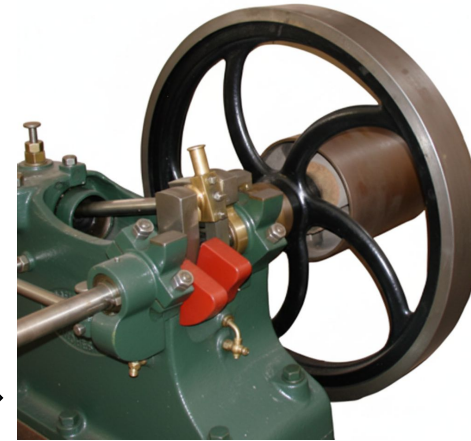
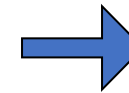
Tipo de máquina	
Bombas alternativas	0,04
Bombas centrífugas	0,02
Prensas mecánicas	0,04
Máquinas de serrar	0,04
Hiladoras y telares	0,01
Máquinas herramienta	0,03
Maquinaria agrícola	0,05
Maquinaria de obra	0,05
Alternadores autónomos	0,004
Alternadores autónomos o a la red	0,001
Dinamos	0,005

Volante de inercia

- No es posible conseguir un régimen cíclico perfectamente uniforme $\omega = \text{cte.}$
- Y solo, se puede considerar un régimen permanente, en el que cada ciclo de máquina se repita permanentemente: régimen permanente $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$
- Con el objetivo de minimizar la irregularidad del ciclo de la máquina:

$M = M_m - M_r = I \cdot \epsilon$, para un ciclo completo de la máquina constante tratamos de reducir el valor de la aceleración aumentando el valor de la inercia reducida, incorporando una masa adicional al sistema .

- el **objetivo** del volante de inercia es lograr que las velocidades extremas ($\omega_{\max}$ y $\omega_{\min}$), a lo largo del ciclo, no se desvíen excesivamente de la velocidad media (ω_m), aumentando la inercia de la máquina.



VOLANTE DE INERCIA

Volante de inercia

- El ***volante de inercia*** consiste en una masa adicional, con forma de rueda, cuyo momento de inercia es tal que puede ser sustituido por una masa puntual situada en el punto donde se sitúa la masa reducida de la máquina.
- Elemento totalmente pasivo que únicamente aporta al sistema una inercia adicional.

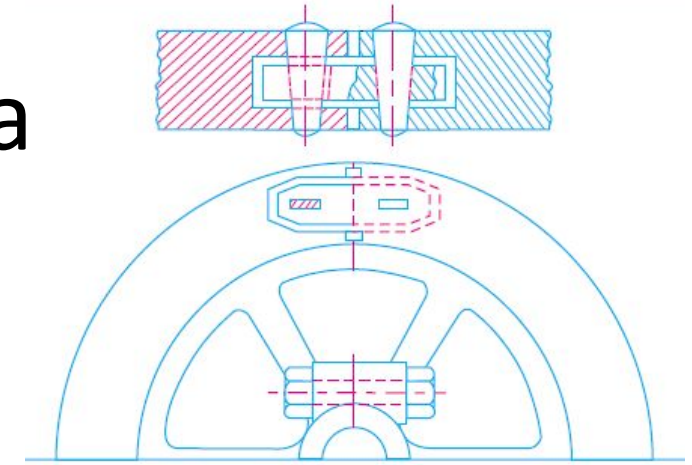
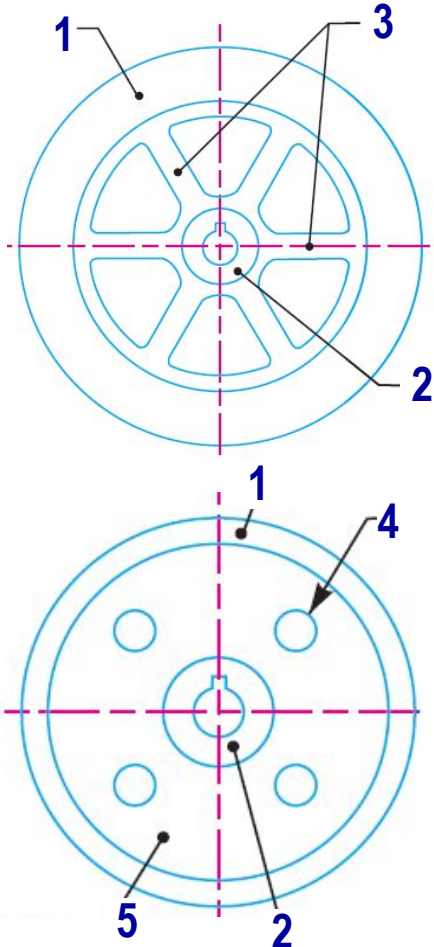
$$M = M_m - M_r = I \cdot \epsilon \text{ objetivo } \epsilon \rightarrow 0 \text{ entonces}$$

$$I \cdot \epsilon = (I + I_v) \cdot \epsilon^* \text{ de manera que } \epsilon^* = \epsilon \cdot I / (I + I_v)$$

- Al incrementarse la inercia del sistema, en igualdad de condiciones, se reducen las fluctuaciones de velocidad $[\omega_{\max} \text{ y } \omega_{\min}]$.
- Además:
 - Almacena energía y permite un nivel alto de energía.
 - Reduce esfuerzos máximos.
 - Alarga las fases de arrancada y parada.



Fabricación de los volantes de inercia



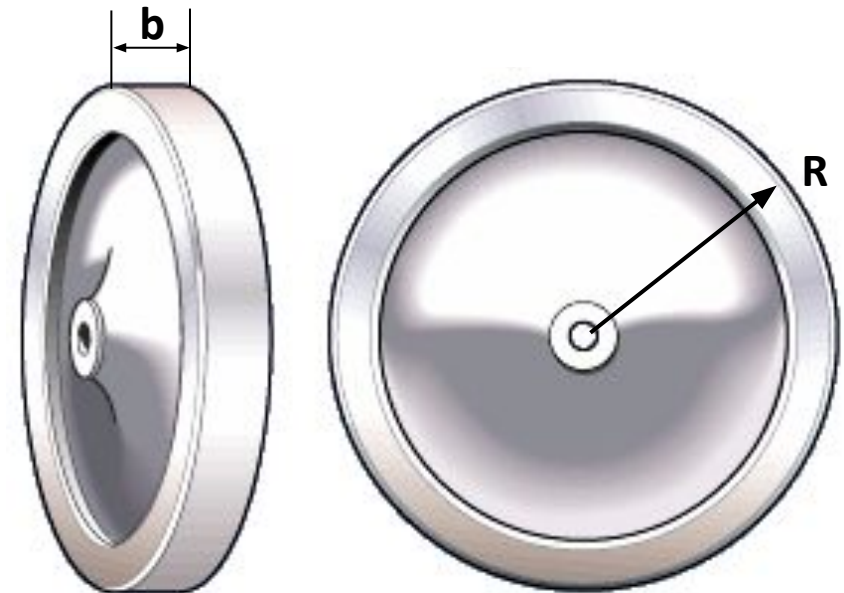
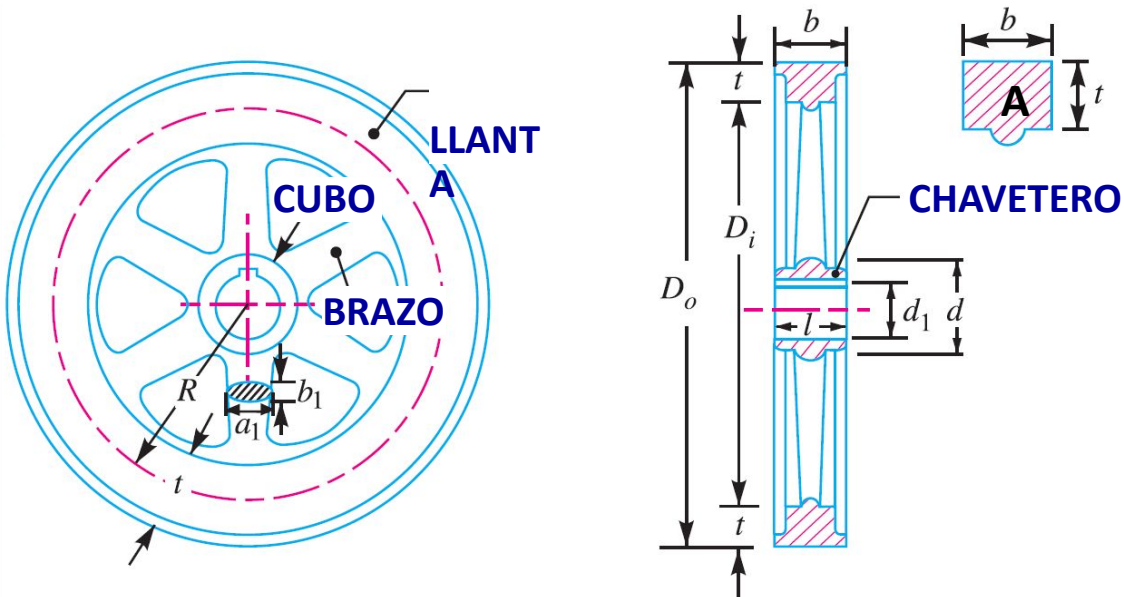
- Los volantes de gran tamaño (volantes mayores de 2,5 m) normalmente se efectúan en dos piezas.
- Los volantes de tamaño medio-grande (entre 600 mm y 2500 mm) constan de 3 partes: llanta (1), cubo (2) y brazos (3). El número de brazos depende del tamaño del volante y de la velocidad de giro.
- Los volantes pequeños (hasta 600 mm) se realizan de una sola pieza. Suele incluirse agujeros (4) en el cuerpo (5) repartidos simétricamente.

Momento de inercia de Volantes

- **Volante de llanta** Se supone la masa concentrada en la llanta, con un momento de inercia: $I_v = m \cdot R^2$ donde $m = 2\pi \cdot R \cdot A \cdot \rho$
- Densidad del material: ρ
- Sección de la llanta: $A = b \cdot t$ ($b = 2t$)

- **Volante macizo** Se trata de un disco macizo con un momento de inercia:

$$I_v = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \text{ donde } m = \pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \rho$$



Efectos de colocar un volante de inercia

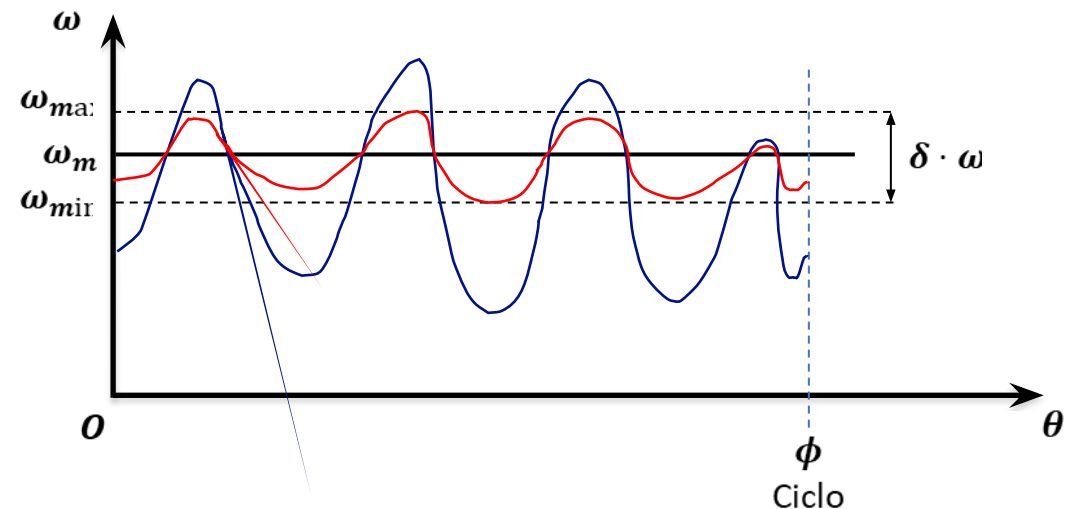
- Reducción de las amplitudes de las variaciones cíclicas de velocidad.
- Acumulación de energía cinética.
- Mantenimiento de un nivel de energía suficientemente alto.
 - Por ejemplo, en máquinas donde hay un par motor casi constante y un pico de par resistente muy elevado (punzonadora, prensa, etc.).
- Reducción de los esfuerzos máximos en algunos miembros de la máquina.
 - Si el par motor es mayor que el resistente, las piezas de la máquina se aceleran. Si hay volante, la diferencia entre par motor y resistente irá a acelerar éste, solo sufrirán las piezas más próximas al volante.
- Aumento del tiempo de puesta en marcha y parada de la máquina.

Intervención del volante en la marcha de la máquina

- El volante transforma la curva de variación de la velocidad de la máquina, dentro de un ciclo en la curva (azul → rojo) una vez fijado el valor de δ , que sirve de base para el cálculo del volante.
- La fluctuación de la velocidad es muy pequeña y se puede considerar que la máquina funciona a velocidad constante.
- **Ejemplo:** Sea un alternador que gira a una velocidad de 1500 r.p.m., con un grado de irregularidad $\delta = 0,01$, las velocidades extremas serán:

$$\omega_{max} = \omega_m \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) = 1500 \cdot (1 + 0,005) = 1507,5rpm$$

$$\omega_{min} = \omega_m \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = 1500 \cdot (1 - 0,005) = 1492,5rpm$$



Cálculo de un volante de inercia: método aproximado

- Si **A** es el trabajo desarrollado en el intervalo de ω_{max} y ω_{min}
- Se considera la inercia de la máquina despreciable frente a la del volante (1ª aproximación).
- En general, **A** será la suma algebraica de las áreas comprendidas entre las dos abscisas anteriores.

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = \frac{1}{2} I_v \cdot \omega_{max}^2 - \frac{1}{2} I_v \cdot \omega_{min}^2 = \frac{1}{2} I_v \cdot (\omega_{max} + \omega_{min}) \cdot (\omega_{max} - \omega_{min})$$

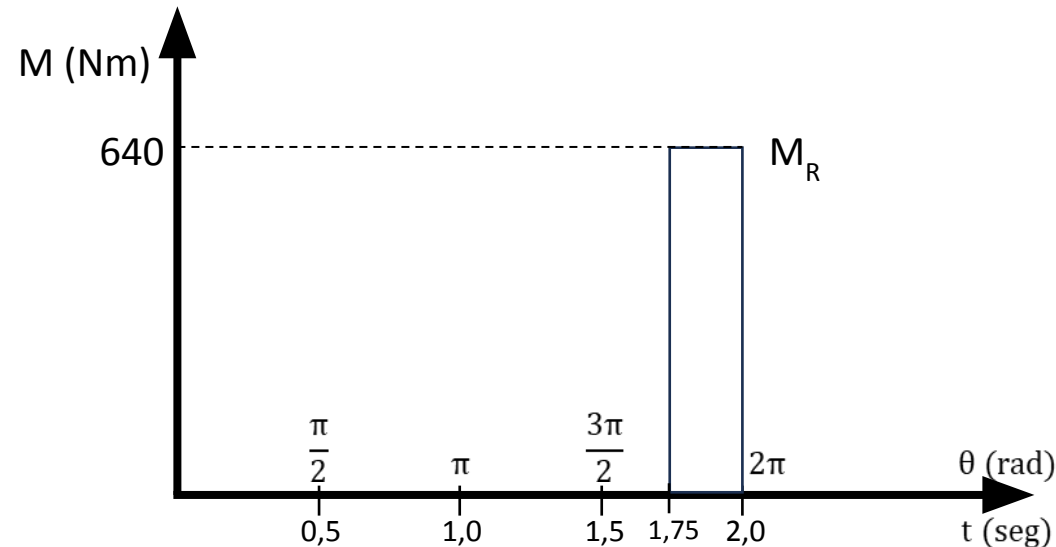
$$A = I_v \cdot \delta \cdot \omega_m^2 \Rightarrow I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} \Rightarrow \delta = \frac{A}{I_v \cdot \omega_m^2}$$

- Analizando las expresiones anteriores, se observa que para un par reducido dado M se obtiene el valor de A y si imponemos una inercia alta del volante I_v , esta da lugar a una menor velocidad media ω_m^2 , y por tanto una menor δ irregularidad de marcha a la máquina.

Ejemplo de aplicación (1/4)

El diagrama de la figura representa el par resistente M_R , a lo largo de un ciclo, de una punzonadora, cuya marcha se regula por medio de un volante de inercia. Determinar:

- a) El par motor constante necesario y la potencia del motor.
- b) El momento de inercia del volante.
- c) El diámetro que tendría el volante de inercia si fuese macizo de acero con espesor $e = 100$ mm y densidad del acero $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$



Ejemplo de aplicación (2/4)

- Solución:

a) El par motor constante necesario (M_M) y la potencia del motor (P_M).

Conociendo el par de carga o resistente (M_R) y la característica constante del par motor o motriz (M_M):

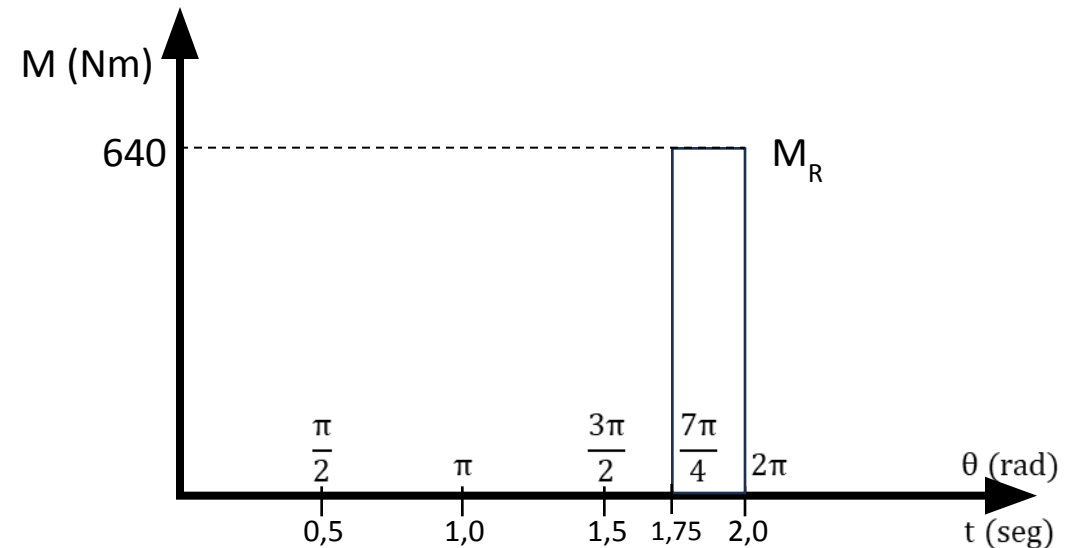
$$\vec{M} = \vec{M}_M - \vec{M}_R$$

Con la ecuación de régimen permanente de la máquina $T_\phi = \int_0^\phi M \cdot d\phi = 0$ obtenemos el valor del par motor

$$\begin{aligned} T_{2\pi} &= \int_0^{2\pi} (M_M - M_R) \cdot d\theta = 0 \rightarrow \int_0^{2\pi} M_M \cdot d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} M_R \cdot d\theta \rightarrow 2\pi \cdot M_M = 640 \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$M_M = 80Nm$

La potencia del motor será: $P = M_m \cdot \omega_m$



Ejemplo de aplicación (3/4)

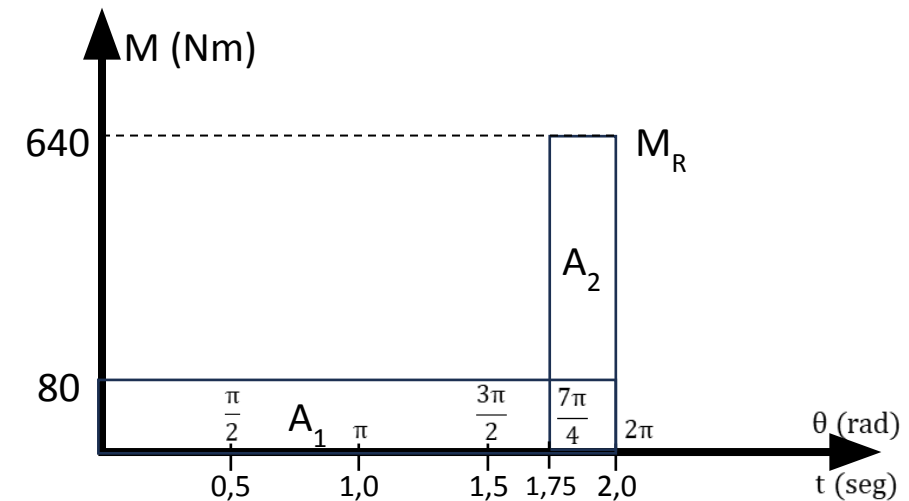
Al ser un trabajo de punzonado, se puede considerar la velocidad mínima como nula y la velocidad máxima como la del ciclo completo, de manera que:

$$\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \rightarrow \omega_{max} = 2\omega_m - \omega_{min} = 2\pi - 0 = 6,28 \text{ rad/seg} \rightarrow P = M_m \cdot \omega_m = 80 \cdot \pi = 251,3 \text{ W}$$

b) El momento de inercia del volante: De la ecuación para el cálculo del momento de inercia con el método aproximado: $I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$

donde **A** es el trabajo desarrollado entre el instante de velocidad máxima y el de velocidad mínima, será el contenido en cualquiera de las dos áreas A_1 y A_2 reflejadas en la figura:

$$\underbrace{\left(\frac{7\pi}{4} - 0\right) \cdot 80}_{A_1} = \underbrace{\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) \cdot (640 - 80)}_{A_2} = 140\pi = 439,8 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}$$



Ejemplo de aplicación (4/4)

- El grado de irregularidad será: $\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} = \frac{2\pi - 0}{\pi} = 2$
- El cálculo del volante por el método aproximado: $I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{439,8}{2 \cdot \pi^2} = 22,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

c) El diámetro que tendría el volante de inercia si fuese macizo de acero con espesor $e = 100 \text{ mm}$ y densidad del acero $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

El momento de inercia de un volante macizo es:

$$I_v = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} (\rho \cdot e \cdot \pi \cdot R^2) \cdot R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot e \cdot \pi \cdot R^4$$

$$R = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot I_v}{\rho \cdot e \cdot \pi}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 22,28}{7800 \cdot 0,1 \cdot \pi}} = 0,367 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad D = 0,734 \text{ m}$$

Cálculo de un volante de inercia: método aproximado Rectificado

Si el momento de inercia reducido de la máquina I_R no es despreciable frente al del volante I_v , entonces METODO APROXIMADO RECTIFICADO:

- En una primera aproximación, la ecuación de la dinámica de la máquina con volante es:

$$M = M_M - M_R = (I_R + I_v) \cdot \epsilon$$

se obtiene al considerar las variaciones de I_R despreciables, en la transparencia (11) $\frac{dI}{dt} = 0$

- El cálculo aproximado del volante considera despreciable la inercia reducida de la máquina y el momento reducido se aproxima por: $M = M_M - M_R = I_v \cdot \epsilon$.
- Si consideramos la inercia reducida y la englobamos en el par reducido: $M - I_R \cdot \epsilon = I_v \cdot \epsilon$
- Luego, hay que considerar el par de inercia $I_R \cdot \epsilon$ y rectificar la función momento reducido M con el valor anterior del par de inercia calculado para todas las posiciones de la máquina, reducidos al punto A, rectificando el método anterior.

$$I_R + I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$$

Nota: El método aproximado, con rectificación o no, da suficiente aproximación con máquinas que van a elevada velocidad, pero con máquinas lentas se obtienen volantes muy superiores a los realmente necesarios.

Cálculo de un volante de inercia: método exacto

Si se conocen las variaciones, a lo largo del ciclo, de la energía cinética total E_c de la máquina **con volante** de 1 gdl y del momento de inercia reducido I_R de la máquina con volante I_v .

- Para una posición cualquiera de la máquina con volante (θ), su energía cinética es:

$$E_c(\theta) = \frac{1}{2} I(\theta) \cdot \omega(\theta)^2 = \frac{1}{2} [I_R(\theta) + I_v] \cdot \omega(\theta)^2$$

- Existe una relación clara entre la Energía cinética de la máquina y el par de inercia reducido. Además, el **trabajo producido** por la acción de las fuerzas motrices y resistentes (T) entre la posición inicial 0 y una cualquiera dada es:

$$\Delta E_c = T = E_c - E_0 \Rightarrow E_c = \Delta E_c + E_0$$

- Del mismo modo, la inercia reducida de la máquina con volante será:

$$I_R = I - I_v$$

Cálculo de un volante de inercia: método exacto

● DIAGRAMA ENERGÉTICO

De igual manera, se puede representar una función que relacione el trabajo realizado T por el balance de esfuerzos externos (motrices) con los resistentes (carga) respecto al punto inicio del ciclo de máquina, es decir, las variaciones de energía cinética de la **máquina sin volante** en función del momento de inercia reducido de la máquina sin volante.

$$\left. \begin{array}{l} T = E_c - E_0 \\ I_R = I - I_v \end{array} \right\} T = T(I_R)$$

Representación del
DIAGRAMA
ENERGÉTICO de la
máquina sin regular

Los puntos de tangencia P_1 y P_2 se corresponden con las posiciones de la máquina ($\theta_{\max}$ y $\theta_{\min}$) donde se encuentran los valores máximos y mínimos de velocidad.

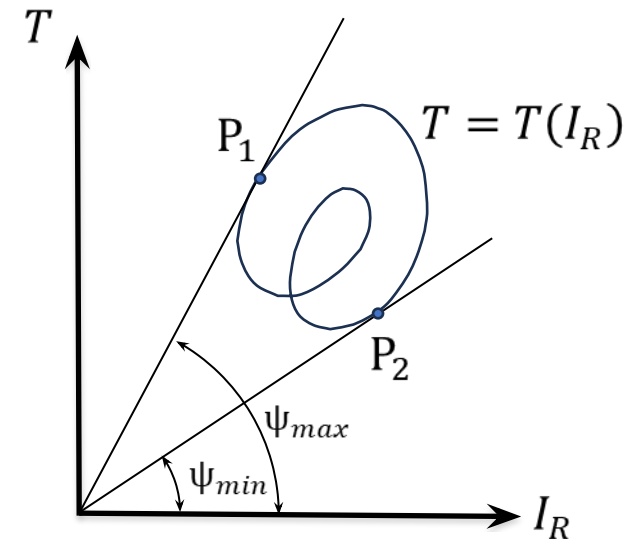
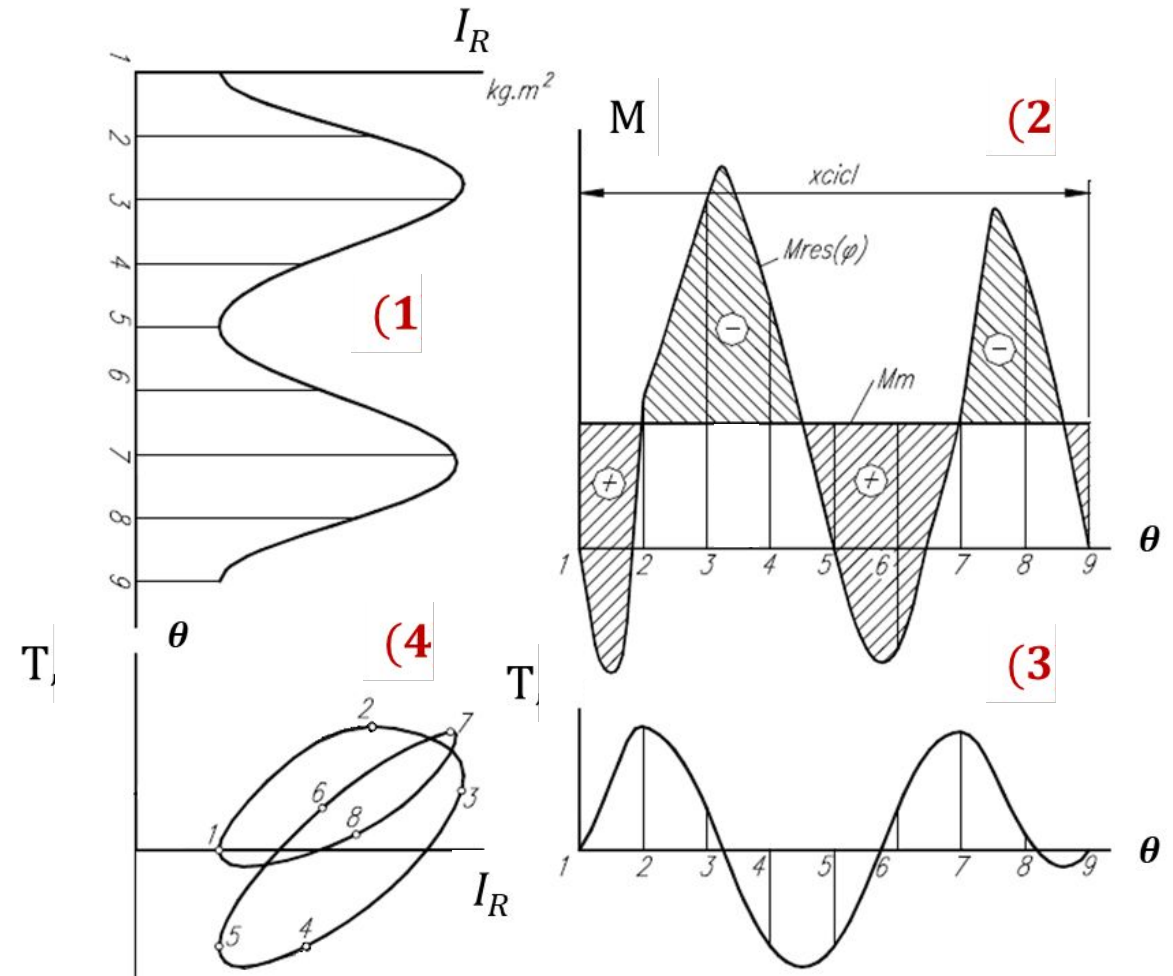


Diagrama de Wittenbauer

Cálculo de un volante de inercia: método exacto

Obtención del diagrama Energético (DIAGRAMA DE WITTENBAUER) a partir de:

- Diagrama del Momento de Inercia Reducido I_R en un ciclo completo de la máquina (sin regular) (1).
- Diagrama del Par reducido M ($M_{motor} - M_{resistente}$) durante un ciclo completo de la máquina (2).
- Se halla el Diagrama del trabajo producido $T = \int_0^\phi (M_M - M_R) \cdot d\theta$ (evolución del incremento de la Energía Cinética E_C durante un ciclo completo de la máquina) (3).
- Se determina el Diagrama de Wittenbauer T vs. I_R en un ciclo completo de la máquina (4).



Cálculo de un volante de inercia: método exacto

También, podemos representar en el diagrama energético (DE) las variaciones de energía cinética de la **máquina con volante** en función del momento de inercia reducido de la máquina con volante.

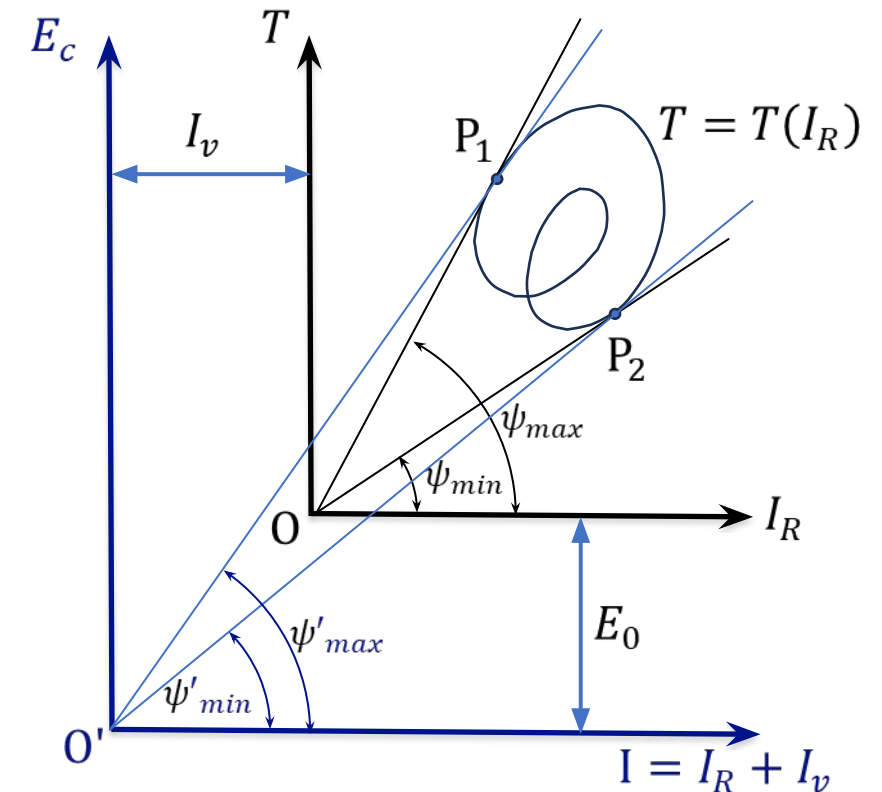
$$\left. \begin{array}{l} E_c = T + E_0 \\ I = I_R + I_v \end{array} \right\} T = T(I)$$

Representación del
DIAGRAMA
ENERGÉTICO de la
máquina regulada

Se observa, que el DE obtenido es idéntico al obtenido para la máquina sin volante Salvo:

- una traslación horizontal de magnitud I_v
- una traslación vertical de magnitud E_0

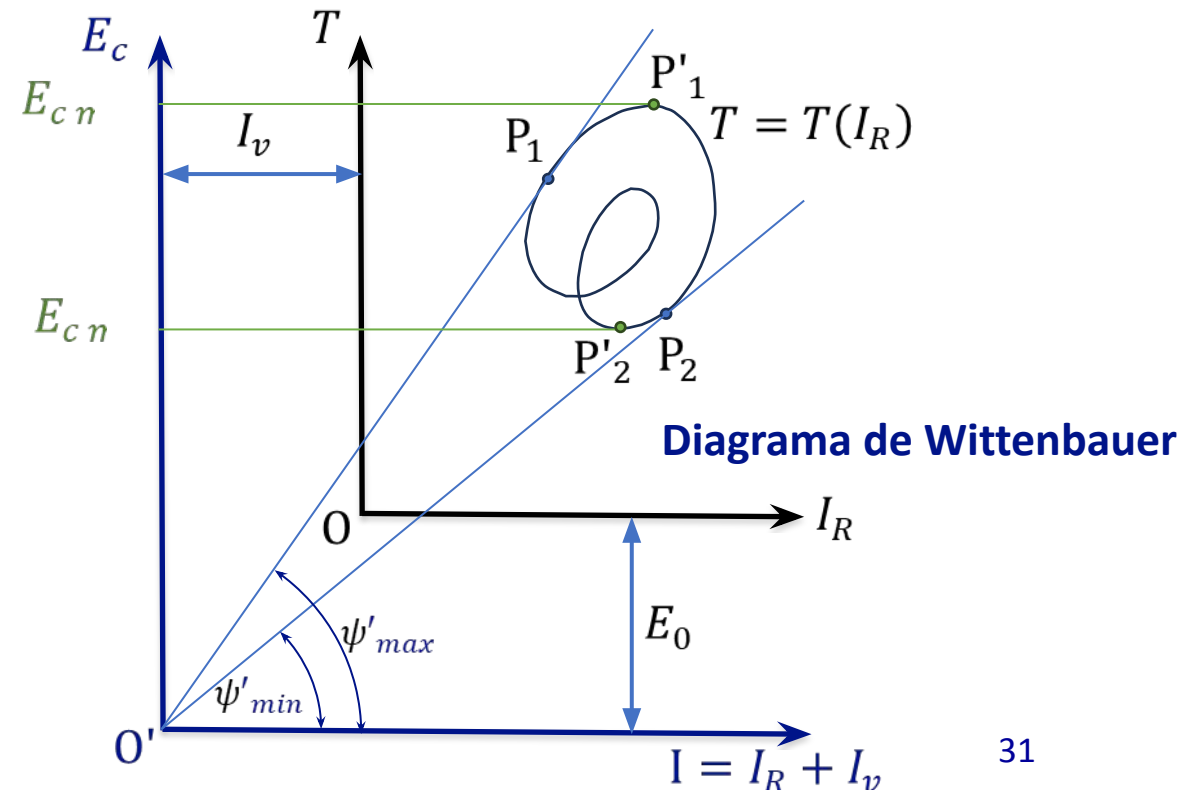
Para conocer la velocidad a una posición cualquiera P_i de la máquina, sólo hay que medir la pendiente de la recta que resulta de unir el origen O' , con el punto del gráfico correspondiente a la posición P_i .



Cálculo de un volante de inercia: método exacto

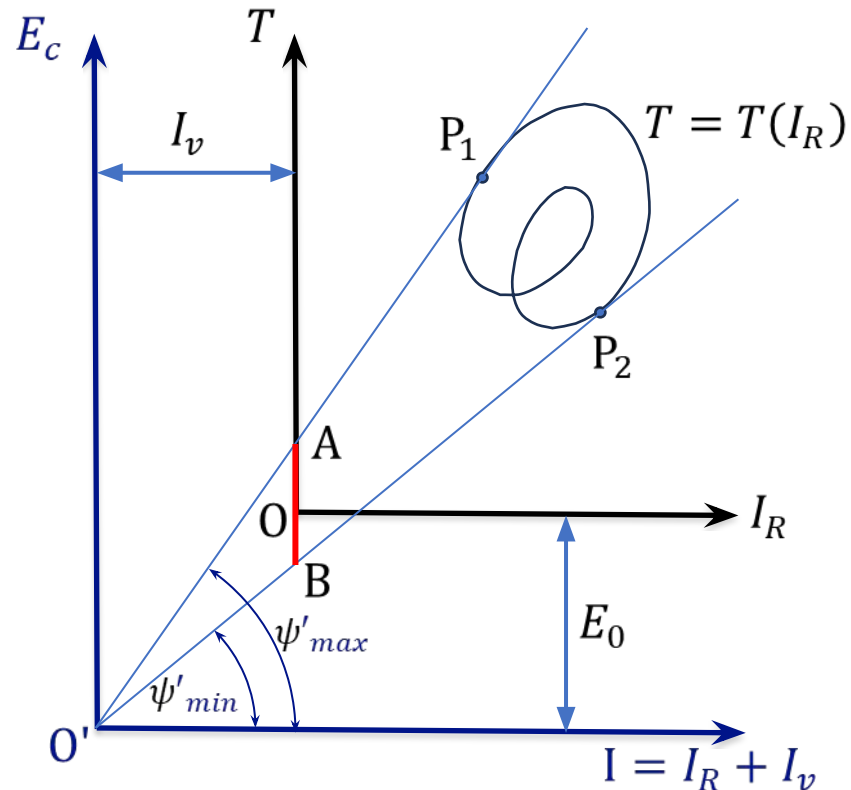
- Para una posición cualquiera de la máquina: $\tan \theta = \frac{E_C}{I} = \frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega^2 = \sqrt{2 \cdot \tan \theta}$ y a partir de θ hallamos el valor de ω .
- Las posiciones de máxima y mínima energía P'_1 y P'_2 (método aproximado) no coinciden con las de máxima y mínima velocidad P_1 y P_2
- Para calcular el momento de inercia del volante, los segmentos I_v y E_0 no son conocidos, luego el punto O' tampoco lo es.
- Pero al conocer las tangentes ψ'_{max} y ψ'_{min} se puede hallar O' como la intersección de las dos tangentes a la curva con estas pendientes.

$$\tan \psi'_{min} = \frac{\omega_{min}^2}{2} \quad \tan \psi'_{max} = \frac{\omega_{max}^2}{2}$$



Cálculo de un volante de inercia: método exacto

- Aunque las tangentes se corten fuera del papel, el problema se puede resolver con sólo medir, en el gráfico, el **segmento AB** (intersección de las citadas pendientes con el eje de ordenadas ΔE_c).



$$\begin{aligned}\overline{AB} &= I_v \cdot \tan \theta'_{max} - I_v \cdot \tan \theta'_{min} = \\ &= I_v (\tan \theta'_{max} - \tan \theta'_{min}) = I_v \left(\frac{\omega_{max}^2}{2} - \frac{\omega_{min}^2}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\overline{AB} = \frac{I_v}{2} (\omega_{max} - \omega_{min})(\omega_{max} + \omega_{min})$$

$$\overline{AB} = I_v \cdot \delta \cdot \omega_m^2$$

Y se puede obtener el momento de inercia del volante

$$I_v = \frac{\overline{AB}}{\delta \cdot \omega_m^2}$$

Cálculo de un volante de inercia: método exacto

Aplicación práctica: Si se conoce la velocidad media de la máquina ω_m y el grado de irregularidad δ . Se calculan los ángulos máximo y mínimo:

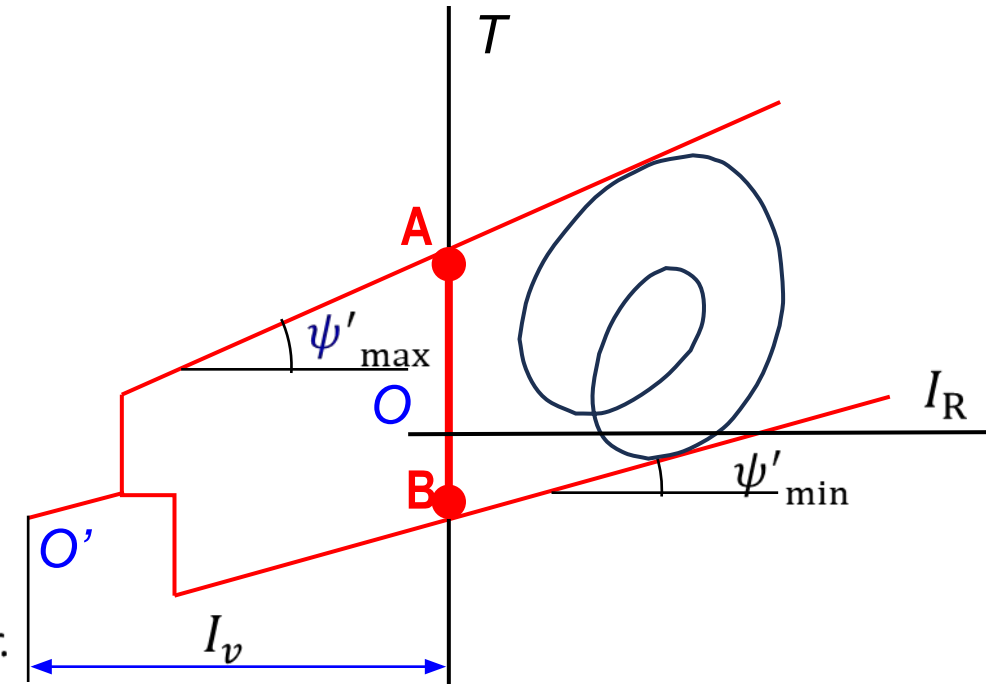
$$\psi'_{\min} = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_m^2}{2} (1 - \delta) \right) \quad \text{y} \quad \psi'_{\max} = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_m^2}{2} (1 + \delta) \right)$$

Se trazan dos líneas:

- Una con pendiente $\psi'_{\max}$ y tangente a la curva en su parte superior.
- Otra con pendiente $\psi'_{\min}$ y tangente a la curva en su parte inferior.

La intersección de estas dos líneas determina el punto O'. El momento de inercia del volante deseado sería la distancia horizontal entre O y O'.

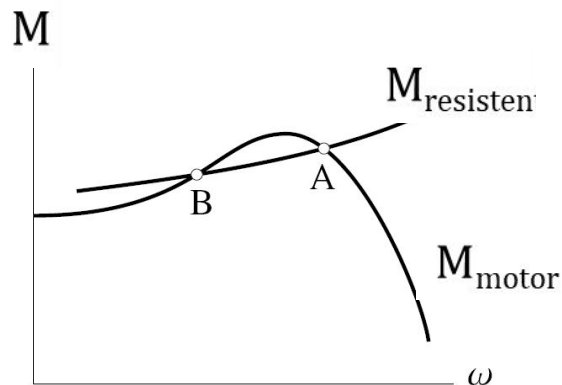
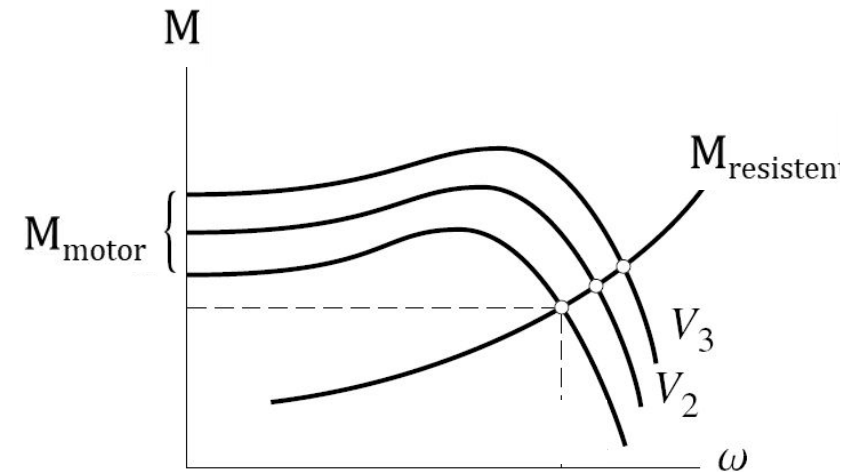
NOTA.- Cuando el grado de irregularidad es muy pequeño, los ángulos máximo y mínimo son muy parecidos y se recurre a calcular el momento de inercia del volante a partir del segmento AB



$$I_v = \overline{OO'} = \frac{\overline{AB}}{\delta \cdot \omega_m^2}$$

Regulación de Máquinas: Curvas características VELOCIDAD-PAR

- Ejemplo de Curvas características que relacionan la velocidad angular (ω) y el par (M) de un motor eléctrico usando la tensión (V) como parámetro variable (la inercia reducida al eje es constante).
- Si en el mismo gráfico se dibujan el par motor y el par resistente de una máquina, los puntos de intersección de ambas curvas corresponden al régimen estacionario (la aceleración es nula).
- El funcionamiento del volante a esa velocidad es estable:
 - Si la velocidad baja, el par motor será mayor que el par resistente y la máquina se acelerará.
 - Si la velocidad aumenta, el par resistente será mayor que el par motor y la máquina decelerará.



- Una selección inadecuada del par motor, puede producir un funcionamiento inestable de la máquina:
 - Si la velocidad de la máquina disminuye del punto B, la máquina acabaría parándose.
 - Si la velocidad aumenta, lo haría hasta el punto A (posición estable de la máquina).

Volante de inercia del automóvil

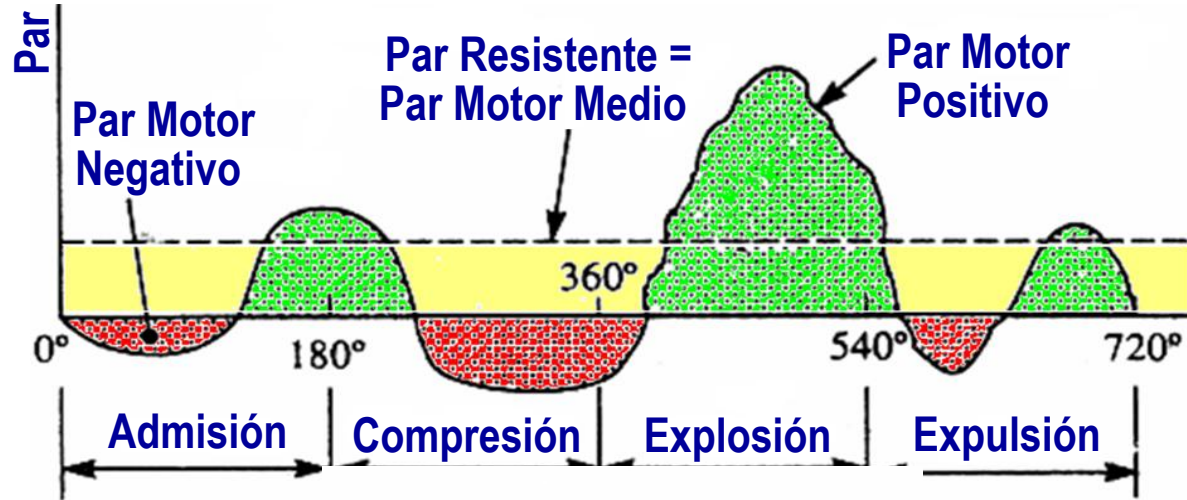


Imagen 1

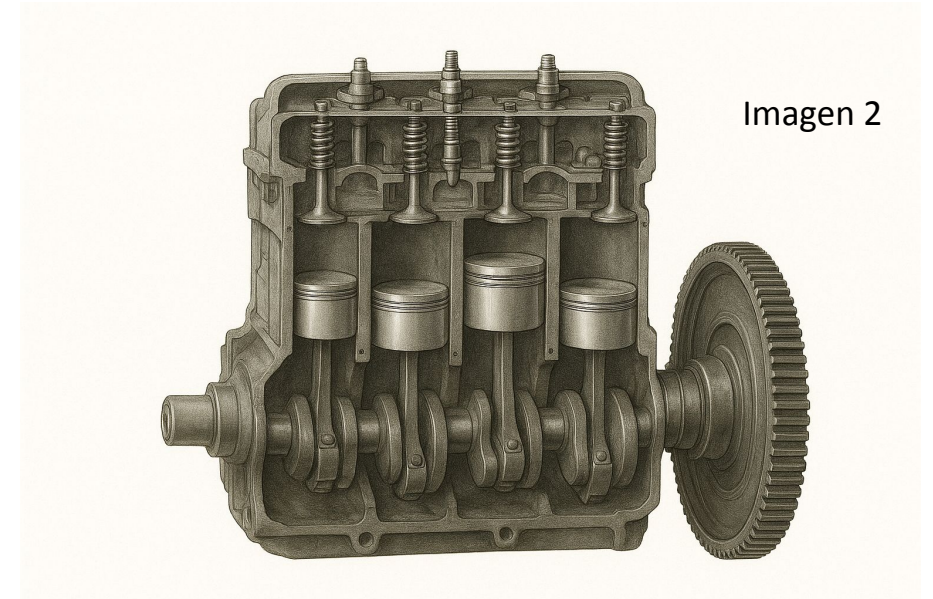


Imagen 2

Créditos imágenes

Pág. 15: Imagen generada con Gemini 2.5

Pág. 16: Nicolás Pérez, [Máquina de vapor de tipo Watt](#), CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Pág. 29: Imagen adaptada de Cinemática y Dinámica de máquinas, A. Lamadrid y A. Corral, sección de publicaciones UPM

Pág. 35:

Imagen 1 generada con Gemini 2.5

Imagen 2 generada con ChatGPT 4