

OpenCourseWare

TEORÍA DE MÁQUINAS

CRISTINA CASTEJÓN SISAMÓN

EDUARDO CORRAL ABAD

RAUL GISMEROS MORENO

MARIA JESUS GÓMEZ GARCÍA

JESUS MENESES ALONSO

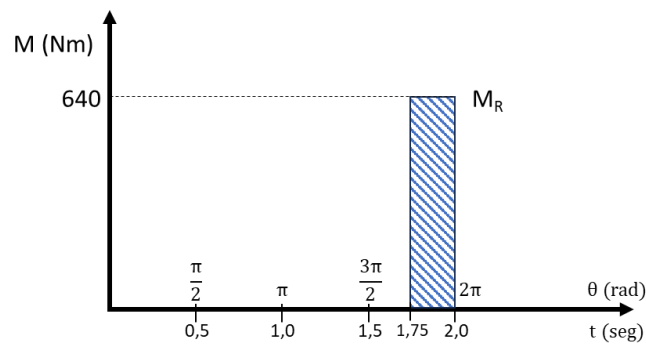
HIGINIO RUBIO ALONSO

ABRAHAM VADILLO MORILLAS

Ejercicios de volantes de inercia



1. El diagrama de la figura representa el par resistente M_R , a lo largo de un ciclo de punzonadora, cuya marcha no necesita una regularidad especial. Determinar:
- El par motor constante necesario y la potencia del motor
 - El momento de inercia del volante
 - El diámetro del volante macizo, para un espesor del mismo $e = 10$ cm (considerar que la densidad del acero es $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$)



Solución:

- a) El par motor constante necesario (M_M) y la potencia del motor (P_M).

Conociendo el par de carga o resistente (M_R) y la característica constante del par motor o motriz (M_M):

$$\vec{M} = \vec{M}_M - \vec{M}_R$$

Con la ecuación de régimen permanente de la

máquina $T_\phi = \int_0^\phi M \cdot d\phi = 0$ obtenemos el

valor del par motor

$$T_{2\pi} = \int_0^{2\pi} (M_M - M_R) \cdot d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} M_M \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} M_R \cdot d\theta$$

$$2\pi \cdot M_M = 640 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$M_M = 80 \text{ Nm}$$

La potencia del motor será: $P = M_m \cdot \omega_m$

Al ser un trabajo de punzonado, se puede considerar la velocidad mínima como nula y la velocidad máxima como la del ciclo completo, de manera que:

$$\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \rightarrow \omega_{max} = 2\omega_m - \omega_{min} = 2\pi - 0 = 6,28 \text{ rad/seg}$$

$$P = M_m \cdot \omega_m = 80\pi \cdot 6,28 = 251,3 \text{ W}$$

- b) El momento de inercia del volante: De la ecuación para el cálculo del momento de inercia con el método aproximado: $I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$

donde A es el trabajo desarrollado entre el instante de velocidad máxima y el de velocidad mínima, será el contenido en cualquiera de las dos áreas A_1 y A_2 reflejadas en la figura:

$$\left(\frac{7\pi}{4} - 0\right) \cdot 80 = \left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) \cdot (640 - 80) = 140\pi = 439,8 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}$$

El grado de irregularidad será: $\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} = \frac{2\pi - 0}{\pi} = 2$, como puede observarse el grado de irregularidad de esta máquina es bastante elevado debido a la alta carga que soporta durante un instante de tiempo corto dentro del ciclo.

El cálculo del volante por el método aproximado: $I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{439,8}{2 \cdot \pi^2} = 22,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

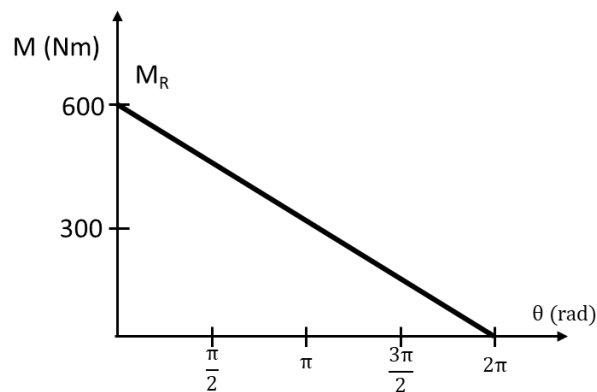
- c) El diámetro que tendría el volante de inercia si fuese macizo de acero con espesor $e = 100 \text{ mm}$ y densidad del acero $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

El momento de inercia de un volante macizo es:

$$I_v = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} (\rho \cdot e \cdot \pi \cdot R^2) \cdot R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot e \cdot \pi \cdot R^4$$

$$R = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot I_v}{\rho \cdot e \cdot \pi}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 22,28}{7800 \cdot 0,1 \cdot \pi}} = 0,367 \text{ m} \Rightarrow D = 0,734 \text{ m}$$

2. El diagrama de la figura representa el par resistente MR de una máquina rotativa a lo largo de un ciclo. Determinar los siguientes parámetros de un volante de inercia para que el grado de irregularidad de la máquina sea menor de 0,02, si el par motor puede considerarse a una velocidad de régimen de 1500 rpm:
- El par motor constante necesario y la potencia del motor
 - El momento de inercia del volante
 - El diámetro del volante macizo para un espesor de 90 mm (considerar que la densidad del acero es $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$)
 - Determinar el valor de la aceleración de la salida de la máquina en cada intervalo de funcionamiento



Solución:

- a) El par motor constante necesario y la potencia del motor

El par motor debe ser igual a la media integral del par resistente a lo largo del ciclo:

$$M_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{600 \cdot 2\pi}{2\pi} = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$$

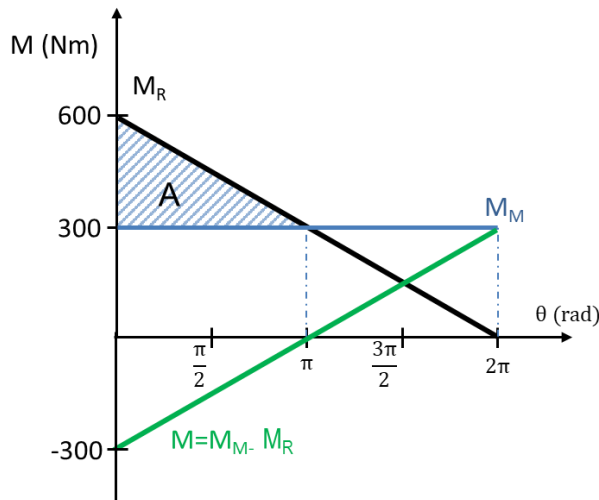
Por otra parte, la velocidad media es

$$\omega_m = \frac{1500 \cdot 2\pi}{60} = 50\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

De manera que la potencia del motor será: $P = M_m \cdot \omega_m = 300 \cdot 50\pi = 47,12 \text{ kW}$

- b) El momento de inercia del volante

De la ecuación para el cálculo del momento de inercia con el método aproximado: $I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$



donde **A** es el trabajo desarrollado entre el instante de velocidad máxima y el de velocidad mínima y será:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (600 - 300) = 471,24 \text{ J}$$

Y sustituyendo en la ecuación:

$$I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{471,24}{0,02 \cdot (50\pi)^2} = 0,955 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- c) El diámetro del volante macizo para un espesor de 90 mm (considerar que la densidad del acero es $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$)

Para un volante macizo el valor de la inercia es $I_v = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} (\rho \cdot e \cdot \pi \cdot R^2) \cdot R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot e \cdot \pi \cdot R^4$

Para los datos del enunciado se obtiene

$$R = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot I_v}{\rho \cdot e \cdot \pi}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 0,955}{7800 \cdot 0,09 \cdot \pi}} = 0,1715 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad D = 0,343 \text{ m}$$

- d) Determinar el valor de la aceleración de la salida de la máquina.

Según la ecuación del par el valor de la aceleración es:

$$\varepsilon = \frac{M_M - M_R}{I_v} = \frac{M}{I_v} = \frac{300 \left(\frac{\theta}{\pi} - 1 \right)}{0,955} = 314,14 \left(\frac{\theta}{\pi} - 1 \right)$$

Como se observa en la ecuación este valor depende de la posición θ en el ciclo, de manera que para los valores característicos podemos obtener

$$\varepsilon(0) = -100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\varepsilon(\pi) = 0$$

$$\varepsilon(2\pi) = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

3. El volante de inercia de una aserradora industrial (con valor $I_v = 18 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$) gira a una velocidad que oscila entre 1584 rpm, y 1616 rpm. Calcular el trabajo desarrollado en el intervalo entre la velocidad máxima y la velocidad mínima.

La velocidad media es: $\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} = \frac{1616 + 1584}{2} = 1600 \text{ rpm}$,

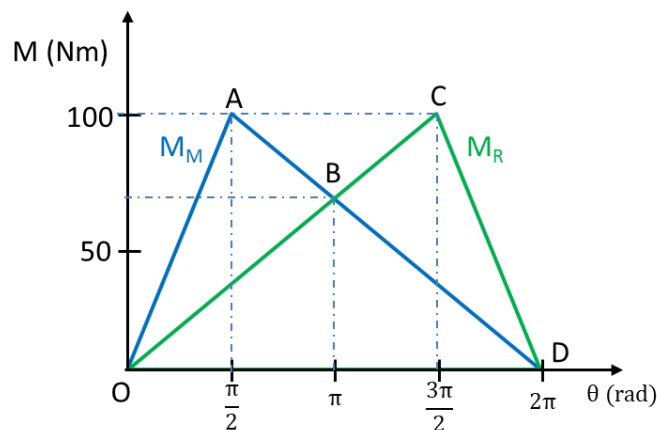
en el SI $\omega_m = 1600 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi}{60} = 167,55 \text{ rad/seg}$

El grado de irregularidad es: $\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{2} = \frac{1616 - 1584}{2} = 0,02$

El trabajo desarrollado en el intervalo entre la velocidad máxima y la velocidad mínima es:

$$[A] = I_v \cdot \delta \cdot \omega_m^2 = 18 \cdot 0,02 \cdot 167,55^2 = [10.106,28 J]$$

4. En la figura se muestra el par resistente y el par motor de una máquina, que opera con una velocidad de régimen $\omega_m = 600$ rpm y a una velocidad máxima $\omega_{max} = 612$ rpm. Calcular el diámetro exterior del volante, si este es macizo y de espesor igual a 2,54 cm. (considerar que la densidad del acero es $\rho = 7800$ Kg/m³)



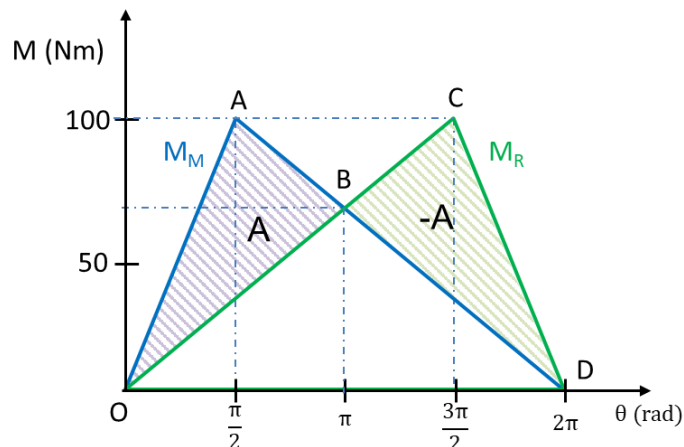
Solución:

El paso previo para calcular la geometría del volante es el cálculo de su inercia según la fórmula $I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$

De esta fórmula necesitamos calcular el grado de irregularidad a partir de la velocidad máxima según la fórmula $\omega_{max} = \omega_m \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)$, $\delta = 2 \cdot \left(\frac{\omega_{max}}{\omega_m} - 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{612}{600} - 1\right) = 0,04$

Por otro lado $\omega_m = 600 \text{ rpm} = \frac{600 \cdot 2\pi}{60} = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Por otra parte, para determinar el valor del trabajo desarrollado entre la velocidad máxima y mínima (A) se observa en la figura que el trabajo desarrollado por el par reducido (positivo) y que absorbe el volante entre 0 y π es igual al que desarrolla (negativo) y que cede al volante entre π y 2π .



Para el cálculo del área A es necesario obtener la ordenada del punto B a partir de la ecuación de cualquier de las dos rectas (que generan los segmentos $\overline{OC}$ o $\overline{AD}$).

$$M = \frac{200}{3\pi} \cdot \theta \rightarrow M_B = \frac{200}{3\pi} \cdot \pi = 66,67 \text{ Nm}$$

$$A = \overline{OAB} = \overline{BCD} = \overline{OAB} - \overline{OBD} = \frac{1}{2}(2\pi \cdot 100 - 2\pi \cdot 66,67) = 104,72 \text{ Nm}$$

De esta manera la inercia del volante es : $I_V = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{104,72}{0,04 \cdot (20\pi)^2} = 0,66 \text{ Kgm}^2$

Para un volante macizo el valor de la inercia es $I_V = \frac{1}{2}m \cdot R^2 = \frac{1}{2}(\rho \cdot e \cdot \pi \cdot R^2) \cdot R^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot e \cdot \pi \cdot R^4$

Despejando el radio se obtiene

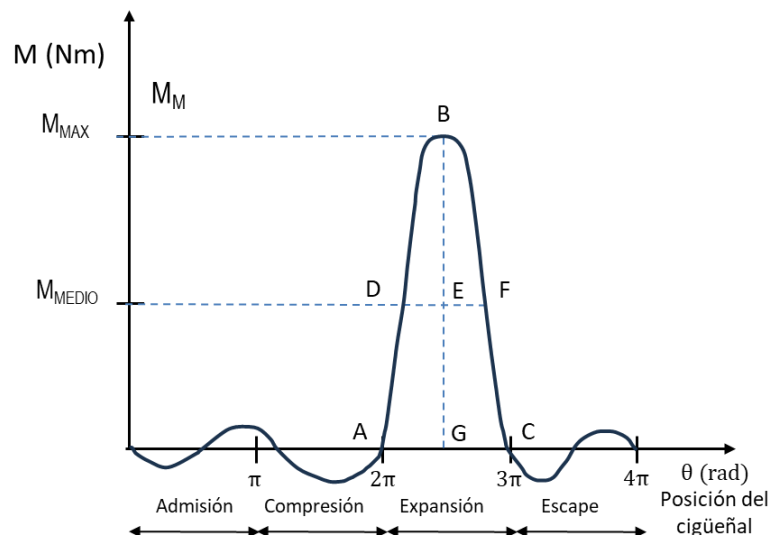
$$R = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot I_V}{\rho \cdot e \cdot \pi}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 0,66}{7800 \cdot 2,54 \cdot 10^{-2} \cdot \pi}} = 0,215 \text{ m} \Rightarrow \boxed{D = 43 \text{ cm}}$$

5. Un motor de combustión interna de cuatro tiempos entrega una potencia de 1,8 kW a 480 rpm. Se desea diseñar un volante de inercia de llanta, de 8cm de espesor, fabricado en fundición gris ($\rho=7220\text{kg/m}^3$) sabiendo que:

- El volante debe limitar las fluctuaciones de velocidad a un 2 % de la velocidad media.
- Durante el ciclo, el trabajo máximo es un 33 % mayor que el trabajo medio.

En la figura (sin escala) se presenta la curva de par motor correspondiente y suponemos que:

- El área ADBFCA es 3/5 del área de un rectángulo de base AC y altura GB.
- El área ADFCA es 8/9 del área de un rectángulo de base AC y altura GE.



El paso previo para calcular la geometría del volante es el cálculo de su inercia según la fórmula (método aproximado) $I_V = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$

Donde conocemos el grado de irregularidad $\delta = 0,02$ y la velocidad media $\omega_m = 480 \text{ rpm} = \frac{480 \cdot 2\pi}{60} = 16\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Por otra parte, para determinar el valor del trabajo desarrollado entre la velocidad máxima y mínima (A) que en el método aproximado se corresponde con la variación entre los valores máximos y mínimos de energía

cinética al ser $E_C = \frac{1}{2} I_V \cdot \omega^2$, para saber en qué posiciones del cigüeñal se encuentran dichos valores máximos y mínimos debemos conocer los valores del par máximo y medio de la figura.

El par medio se calcula a partir de la potencia media (1.8KW):

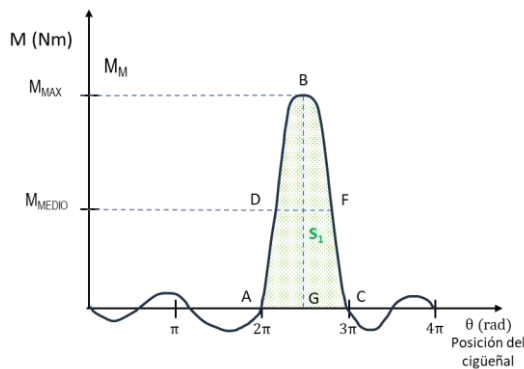
$$P = M_{MEDIO} \cdot \omega_m \rightarrow M_{MEDIO} = \frac{P}{\omega_M} = \frac{1800}{16\pi} = 35,81 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Este valor de par medio se corresponde con el valor de par resistente constante

Así el trabajo medio desarrollado por el par resistente en el ciclo completo será:

$$T_\phi = \int_0^{4\pi} M_R \cdot d\phi = 35,81 \cdot 4\pi = 450 \text{ J}$$

Como el trabajo máximo alcanzado durante el ciclo de expansión (área ADBFCA, S_1 de la figura) es un 33% (1/3) mayor que el trabajo medio durante un ciclo completo, éste será: $T_{MAX} = 450 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 600 \text{ J}$,

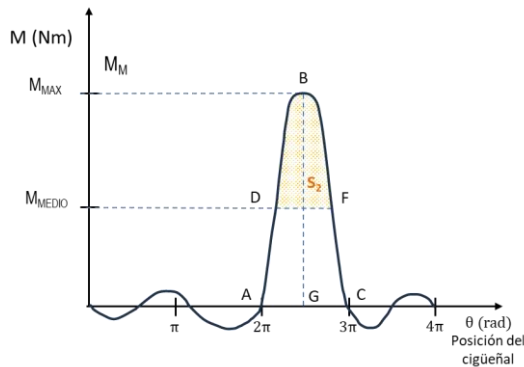


Luego el par máximo transmitido por el volante de inercia:

$$T_{MAX} = S_1 = 600 = \frac{3}{5} \cdot AC \cdot GB = \frac{3}{5} \cdot \pi \cdot M_{MAX}$$

$$M_{MAX} = \frac{5}{3} \cdot \frac{600}{\pi} = 318,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La máxima fluctuación de energía será la región DBFD, S_2 , que es:



$$\Delta E = \text{Area}(DBFD) = S_2 = S_1 - \text{Area}(ADFCA)$$

$$\text{Area}(ADFCA) = \frac{8}{9} \cdot AC \cdot M_{MEDIO} = \frac{8}{9} \cdot \pi \cdot 35,81$$

$$= 100 \text{ J}$$

$$\Delta E = S_2 = 600 - 100 = 500 \text{ J}$$

Siendo el momento de inercia del volante deseado igual a: $I_V = \frac{\Delta E}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{500}{0,02 \cdot (16\pi)^2} = 9,89 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Por último, al ser un volante de llanta:

$$I_V = m \cdot R^2 = (2\pi \cdot R \cdot A \cdot \rho) \cdot R^2 \quad A = b \cdot t = \frac{b^2}{2} \quad (b = 2t)$$

$$\text{Luego: } I_V = (2\pi \cdot R \cdot A \cdot \rho) \cdot R^2 = 2\pi \cdot R^3 \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \rho = \pi \cdot R^3 \cdot b^2 \cdot \rho$$

$$\text{Despejando obtenemos el valor del radio } R = \sqrt[3]{\frac{I_V}{\pi \cdot b^2 \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{9,89}{\pi \cdot 0,08^2 \cdot 7220}} = 0,408 \text{ m}$$

$$\text{Y su masa } m = \pi \cdot b^2 \cdot \rho \cdot R = \pi \cdot 0,08^2 \cdot 7220 \cdot 0,408 = 59,23 \text{ kg}$$

- Una punzonadora industrial opera a 30 ciclos por minuto (rpm). Cada ciclo de punzonado requiere un trabajo de 2000 J (debido a la fuerza que opone el metal por el espesor del mismo). La fase de corte (el punzonado

en sí) dura 1/3 de segundo. Compare la potencia media que debe suministrar el motor en los siguientes dos escenarios:

- Sin volante de inercia: El motor debe suministrar los 2000 J únicamente durante el 1/3 s que dura la operación de corte.
- Con volante de inercia: El motor suministra los 2000 J de forma constante a lo largo de todo el ciclo (el tiempo entre un punzonado y el siguiente).

Solución:

Para el primer escenario (a. máquina funcionando sin volante de inercia), la potencia necesaria será:

$$P = \frac{T}{t} = \frac{2000 \text{ J}}{1/3 \text{ s}} = 6000 \text{ W}$$

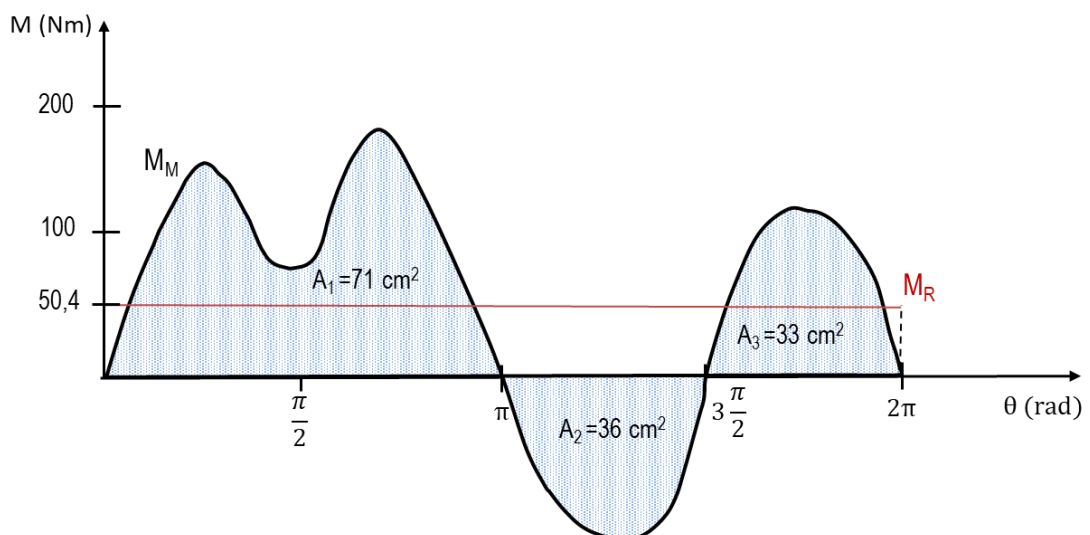
Si se monta un volante (escenario b.), el trabajo a realizar debe ser mismo, pero basta con aplicarlo a lo largo del ciclo completo del volante (que tendremos que calcularlo a partir de la velocidad media), ya que éste lo devolverá en el momento del punzonado. En este escenario, la potencia media necesaria entonces será:

$$P = \frac{T}{t} = \frac{2000 \text{ J}}{2 \text{ s}} = 1000 \text{ W} \quad \text{donde } t = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{30 \text{ rev/min}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 2 \text{ seg / rev}$$

Así en el escenario b. El trabajo realizado por el motor, en 1/3 segundo, es $T = P \cdot t = 1000 \cdot \frac{1}{3} = 333,33 \text{ J}$. Luego, el volante aporta los 1666,67 J. restantes para completar el punzonado.

Nota: La fuerza que opone el material al punzonado es mucho mayor al principio, luego el trabajo desarrollado en el primer instante del punzonado es mayor. Se puede estimar, en ese momento, una potencia instantánea necesaria de 12000 W (o incluso mayor).

- La figura representa el diagrama del par motor y el par resistente de un motor de combustión interna que gira a 3000 rpm. El motor ya posee un momento de inercia propio (momento de inercia reducido de la máquina, $I_R = 1,498 \cdot 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$) y se solicita añadir un volante de inercia (I_V) para suavizar su movimiento reduciendo el grado de irregularidad a un valor tal que no permita variaciones mayores de 50 rpm girando a dicho régimen. Además, por limitaciones de espacio, el radio del volante no debe ser mayor de 11 cm. Se pide: calcular el espesor del volante de inercia (suponiendo disco sólido y fabricado de acero con densidad $\rho = 7890 \text{ Kg/m}^3$).



Solución:

Para calcular el valor del volante de inercia que cumpla las características de diseño y de funcionamiento solicitadas (grado de irregularidad $\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} = \frac{50 \text{ rpm}}{3000 \text{ rpm}} = \frac{1}{60} = 0.017$ y radio del volante $R \leq 11 \text{ cm}$), utilizamos el método aproximado rectificado donde:

$$I_R + I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$$

Donde $\omega_m = 3000 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} = 314,16 \text{ rad/seg}$

Por otra parte, para determinar el valor del trabajo desarrollado entre la velocidad máxima y mínima (A) necesitamos conocer la evolución del par reducido $M = M_M - M_R$

Donde: $\int_0^{2\pi} M_M \cdot d\theta = K \cdot (A_1 - A_2 + A_3) = K \cdot (71 - 36 + 33) = 68 \cdot K \text{ J}$

Siendo K una constante de conversión de cm^2 a Julios.

$\int_0^{2\pi} M_R \cdot d\theta = 2\pi \cdot 50,4 = 316,67 \text{ J}$

De forma que $K = \frac{316,67}{68} = 4,66 \text{ J/cm}^2$

Los valores de velocidad máxima y mínima se encontrarán, considerando el método aproximado, en las posiciones donde se produzcan los valores máximos de energía cinética, que según el teorema de las fuerzas vivas aplicado a este caso: $T_{\omega_{max}-\omega_{min}} = \Delta T = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_{max}^2 - \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_{min}^2$

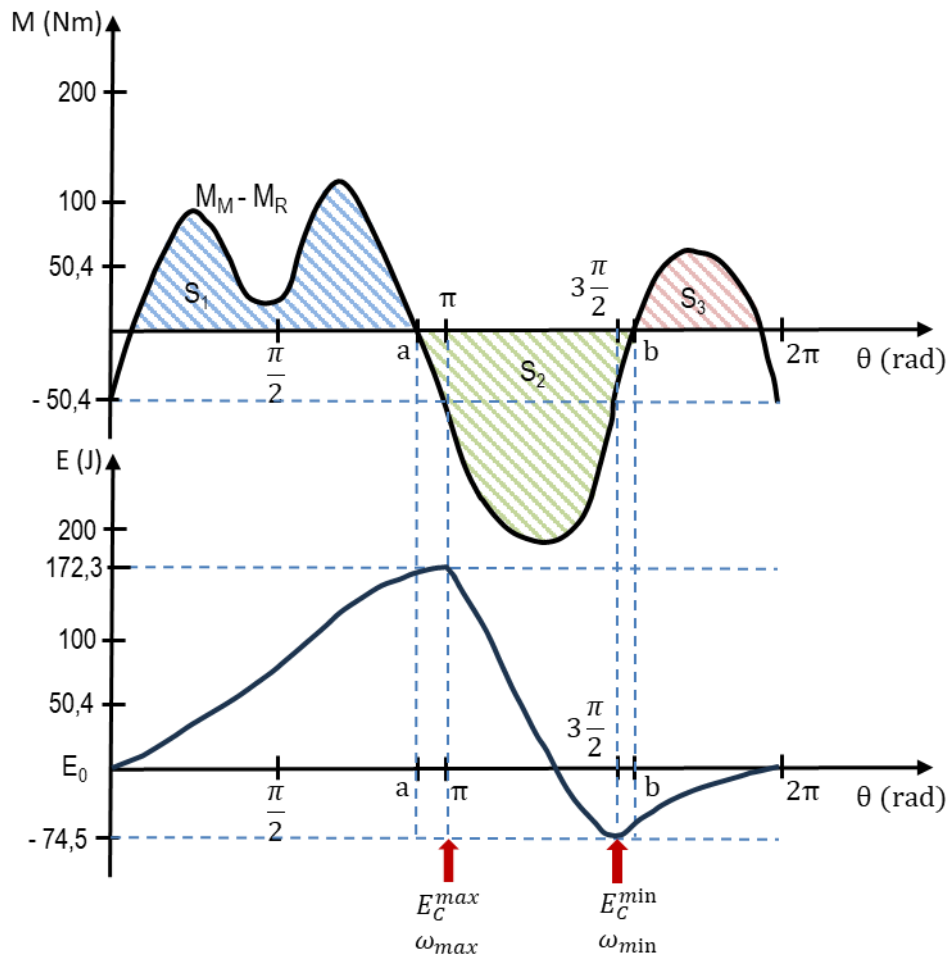
Para ello estudiamos el incremento de energía cinética separando los tramos en los que se cede energía al volante (trabajo positivo) y los que el volante lo cede al sistema (trabajo negativo).

En el diagrama de par reducido se observa que entre los instantes b y a del ciclo, el par aumenta porque M_M es mayor que M_R (representando su trabajo por las áreas S_1 y S_3). Entre a y b (área S_2), M_R es mayor que M_M y por lo tanto la E_c disminuye.

Calculando los valores aproximados entre las posiciones a y b y el inicio y final del ciclo (considerando que se encuentran cerca de las posiciones de π y $3\frac{\pi}{2}$). Los valores de energía obtenidos serán, por lo tanto valores aproximados, al considerar dicha aproximación.

Intervalo	Incremento de energía cedida / absorbida	Energía total en el punto
$[0, \pi]$	$\Delta E = S_1 = A_1 \cdot K - 50,4 \cdot \pi = 172,31 \text{ J}$	$E_\pi = E_0 + \Delta E = E_0 + 172,31$
$[\pi, 3\frac{\pi}{2}]$	$\Delta E = -S_2 = -A_2 \cdot K - 50,4 \cdot \frac{\pi}{2} = -246,82 \text{ J}$	$E_{3\pi/2} = E_\pi + \Delta E = E_0 - 74,51$
$[3\frac{\pi}{2}, 2\pi]$	$\Delta E = S_3 = A_3 \cdot K - 50,4 \cdot \frac{\pi}{2} = 74,51 \text{ J}$	$E_{2\pi} = E_{3\pi/2} + \Delta E = E_0$

Por lo tanto, El máximo incremento de energía cinética que se produce entre dos instantes del ciclo será en el intervalo $[\pi, 3\frac{\pi}{2}]$, que se corresponde con un incremento de energía de $|\Delta E| = S_2 = 246,82 \text{ J}$



Con este valor del trabajo desarrollado en el intervalo procedemos a calcular la inercia total del sistema ($I_R + I_v$):

$$I_R + I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{246,82}{0,017 \cdot (314,16)^2} = 0,15 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Y despejando de la ecuación obtenemos la inercia del volante $I_v = 0,15 - 1,498 \cdot 10^{-2} = 0,135 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

Por último, considerando que, por limitaciones de espacio, el radio del volante no puede ser mayor de 11 cm, se calcula su espesor (suponiendo forma de disco y fabricado de acero):

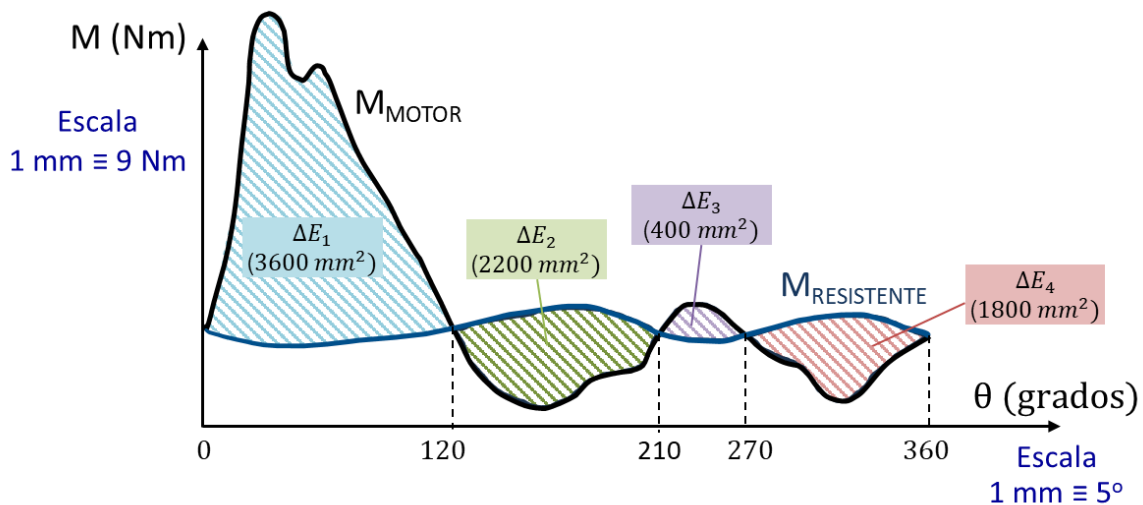
$$m = V \cdot \rho = \pi \cdot R^2 \cdot e \cdot \rho = \pi \cdot (0,11\text{m})^2 \cdot e \cdot 7890 \text{ Kg/m}^3 = (299,92 \cdot e) \text{ Kg}$$

El momento de inercia del volante y su espesor serán:

$$I_v = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot (299,92 \cdot e) \cdot (0,11)^2 = 0,135 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$e = \frac{0,135 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2}{\frac{1}{2} \cdot 299,92 \text{ Kg/m} \cdot (0,11 \text{ m})^2} = 0,0744 \text{ m} = 7,44 \text{ cm}$$

8. El diagrama de la figura representa el par resistente y par motor a lo largo de un ciclo de máquina rotativa y se corresponde con un giro completo del árbol de la misma, que gira a 600 rpm. Calcular la masa de un volante de inercia de llanta para un diámetro de 80 cm y un grado de irregularidad de 0,03.



Solución:

Para calcular la masa del volante necesitamos conocer primero el valor de la inercia según la fórmula (método aproximado) $I_V = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$, donde los valores del grado de irregularidad ($\delta = 0,03$) y de la velocidad media ($\omega_m = 600 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi}{60} = 20\pi \text{ rad/seg}$) están establecidos en el enunciado. Por otra parte, para determinar el valor del trabajo desarrollado entre la velocidad máxima y mínima (A) disponemos del área entre las curvas de par motor y par reducido, pero en milímetros cuadrados, por lo que será necesario, en primer lugar determinar los puntos donde se produce la velocidad máxima y la mínima y posteriormente convertir las unidades de milímetros cuadrados a Julios.

Si calculamos la energía tomada y/o cedida en cada parte del ciclo:

Intervalo	Incremento de energía cedida / absorbida (mm^2)	Energía total en el punto
[0,120]	$\Delta E_1 = 3600 \text{ mm}^2$	$E_{120} = E_0 + \Delta E_1 = E_0 + 3600$
[120,210]	$\Delta E_2 = -2200 \text{ mm}^2$	$E_{210} = E_{120} + \Delta E_2 = E_0 + 1400$
[210,270]	$\Delta E_3 = 400 \text{ mm}^2$	$E_{270} = E_{210} + \Delta E_3 = E_0 + 1800$
[270,360]	$\Delta E_4 = -1800 \text{ mm}^2$	$E_{360} = E_{270} + \Delta E_4 = E_0$

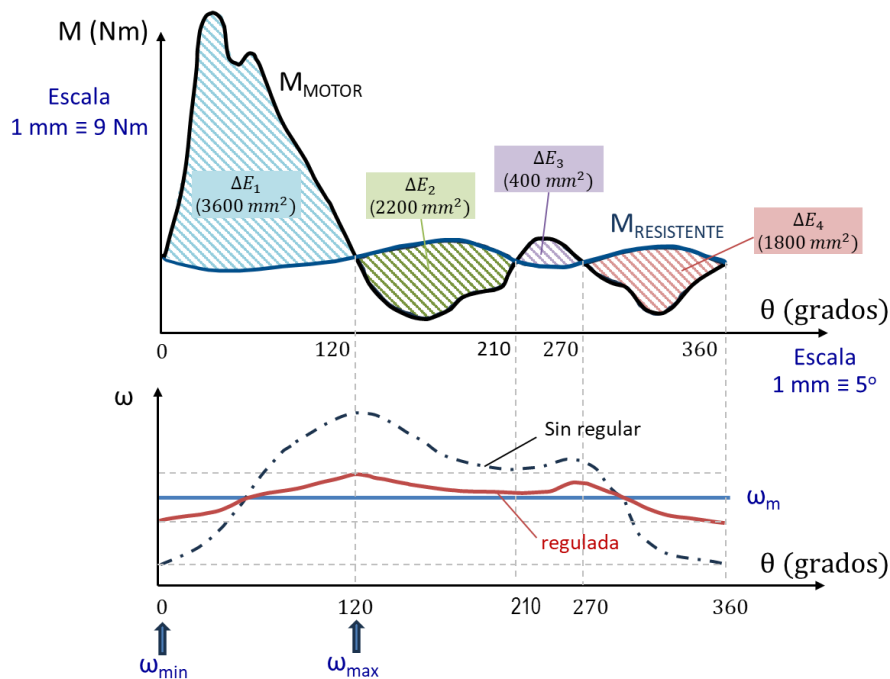
Se observa que el valor máximo de la energía y por lo tanto de velocidad (con el método de resolución aproximado) se produce en 120° , mientras que el valor mínimo de energía, y por tanto de velocidad, se encontrará en 0° o 360° . El trabajo desarrollado entre la velocidad máxima y la mínima se corresponde con

Sabiendo que la escala del gráfico es $1 \text{ mm} \rightarrow 5^\circ$, es decir $1 \text{ mm} \rightarrow 5^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{36} \text{ rad}$

Por otra parte $1 \text{ mm} \rightarrow 9 \text{ Nm}$ por lo tanto $K = 0 \cdot \frac{36}{\pi} = \frac{\pi}{4} \text{ J/mm}^2$

Luego, la máxima fluctuación de energía será: $\Delta E_1 = K \cdot 3600 \text{ mm}^2 = 2827,43 \text{ J}$

Y el momento de inercia del volante será: $I_V = \frac{2827,43}{0,03 \cdot (20\pi)^2} = 23,87 \text{ Kg m}^2$



Y finalmente, la masa del volante (se supone concentrada en la llanta) será:

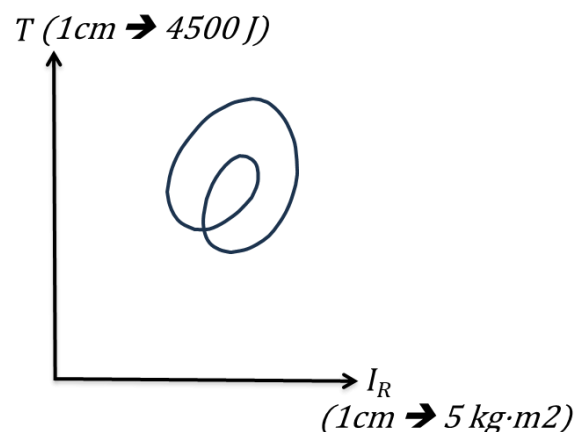
$$I_v = m_v \cdot R_v^2 \Rightarrow m_v = \frac{I_v}{R^2} = \frac{23,87}{\left(\frac{0,8}{2}\right)^2} = 149,19 \text{ kg}$$

9. Una máquina de hilar presenta el diagrama energético (Variación de la energía cinética respecto al momento de inercia) de la figura para un ciclo completo de la máquina.

Sabiendo que:

- La velocidad media deseada es $\omega_m = 240$ rpm
- El grado de irregularidad requerido es $\delta = 0,03$

Determinar el momento de inercia exacto que debe tener el volante de la máquina para asegurar que no se supere el grado de irregularidad especificado.



Solución:

Para el cálculo de la inercia del volante con el método exacto utilizamos el diagrama energético o Diagrama de Wittenbauer de la figura considerando los requerimientos: $\omega_m = 240 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi}{60} = 8\pi \text{ rad/seg}$ y $\delta = 0,03$

Y teniendo en cuenta que $I_v = \frac{\overline{AB}}{\delta \cdot \omega_m^2}$, siendo $\overline{AB}$ en el diagrama de Wittenbauer el segmento que se obtiene al intersecar las pendientes correspondientes a los valores máximos y mínimos de la velocidad con el eje de ordenadas.

De manera que el primer paso será calcular los valores de las pendientes de la máquina regulada según las fórmulas:

$$\theta'_{min} = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_m^2}{2} (1 - \delta) \right) \quad y \quad \theta'_{max} = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_m^2}{2} (1 + \delta) \right)$$

Y considerando en el dibujo la escala facilitada: $I_R (1 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ kgm}^2)$ y $T (1 \text{ cm} \rightarrow 4500 \text{ J})$

Esta escala afecta al valor de la velocidad media en la ecuación $\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{I}}$, de manera que

$$[\omega] = \sqrt{\frac{[T]}{[I_R]}} = \sqrt{\frac{4500}{5}} = 30 \text{ y por lo tanto } \omega'_m = \frac{8\pi}{30} = 0,834$$

Y los valores de las pendientes serán

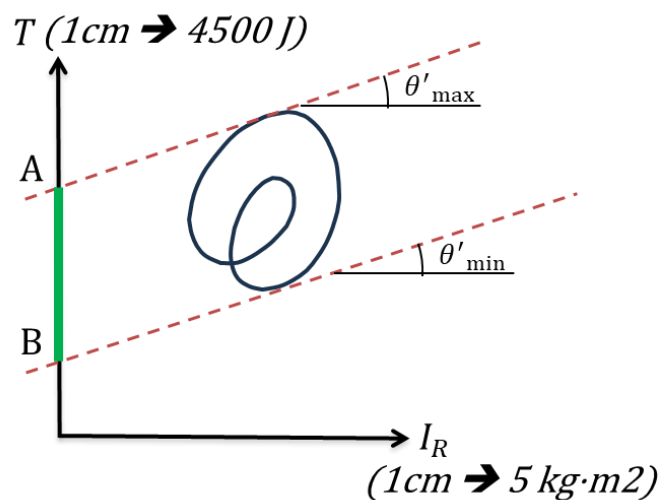
$$\theta'_{min} = \tan^{-1} \left(\frac{(0,834)^2}{2} (1 - 0,03) \right) = 18,91^\circ$$

$$\theta'_{max} = \tan^{-1} \left(\frac{(0,834)^2}{2} (1 + 0,03) \right) = 19,44^\circ$$

Se trazan dos líneas:

- Una con pendiente θ'_{max} y tangente a la curva en su parte superior.
- Otra con pendiente θ'_{min} y tangente a la curva en su parte inferior.

El valor del segmento AB es $\overline{AB} = 2,8 \text{ cm}$



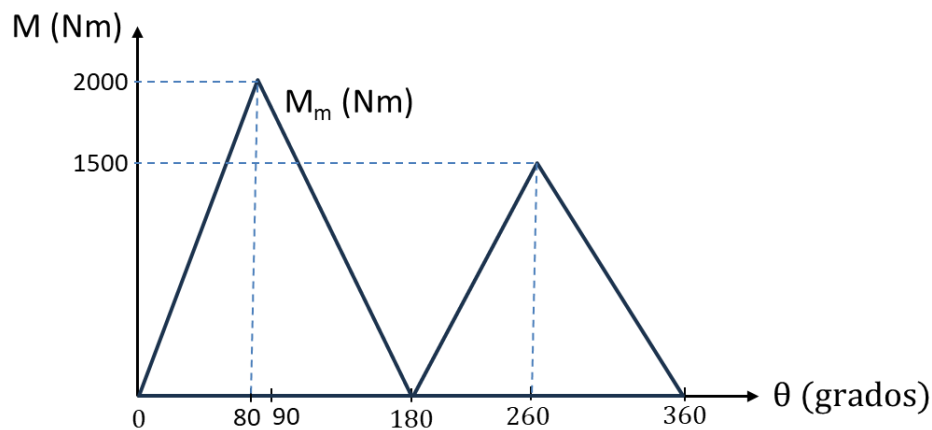
De esta manera: $I_v = \frac{\overline{AB}}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{2,8cm \cdot (4500J/cm)}{0,03 \cdot (8\pi)^2} = 664,96 \text{ kg} \cdot m^2$

10. Se dispone de una máquina de vapor con pistón de doble efecto cuyo diagrama de par motor, en función del ángulo de manivela, se puede aproximar mediante dos triángulos consecutivos:

- Carrera de avance: El par varía desde 0° hasta 180° , alcanzando un valor máximo de **2000 N·m** cuando la manivela se encuentra a 80° respecto al Punto Muerto Interior (PMI).
- Carrera de retorno: El par varía desde 180° hasta 360° , alcanzando un valor máximo de **1500 N·m** cuando la manivela se encuentra a 80° respecto al Punto Muerto Exterior (PME).

Sabiendo que el motor gira a una velocidad media de **100 r.p.m.** y que el volante de inercia sólido tiene un radio de giro de **1,75 m**, determine:

- El par resistente constante que vence la máquina
- El grado de irregularidad que debe tener la máquina para garantizar que la velocidad esté dentro de un rango de $\pm 0.75\%$ respecto a la velocidad media.
- La masa del volante de inercia necesario en la máquina para garantizar dicho grado de irregularidad.



Solución:

- El par resistente constante que vence la máquina. Para el cálculo del par resistente aplicamos la ecuación de permanencia en régimen de una máquina considerando que el trabajo producido por el par reducido en un ciclo completo es igual a cero.

$$T_\phi = \int_0^\phi M \cdot d\phi \rightarrow \int_0^{2\pi} M_m \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} M_R \cdot d\theta$$

$$\frac{2000 \cdot \pi}{2} + \frac{1500 \cdot \pi}{2} = M_R \cdot 2\pi \rightarrow \boxed{M_R = 875 Nm}$$

- El grado de irregularidad que debe tener la máquina para garantizar que la velocidad esté dentro de un rango de $\pm 0.75\%$ respecto a la velocidad media. El cálculo del grado de irregularidad puede obtenerse a partir del rango permitido respecto de la velocidad media (es decir, $\pm \frac{0.75 \cdot \omega_m}{100}$) de manera que

$$\delta = \frac{2 \cdot 0.75}{100} \rightarrow \boxed{\delta = 0.015}$$

- La inercia del volante necesario en la máquina para garantizar dicho grado de irregularidad.

Para el cálculo de la inercia del volante aplicamos la fórmula del método aproximado $I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$,

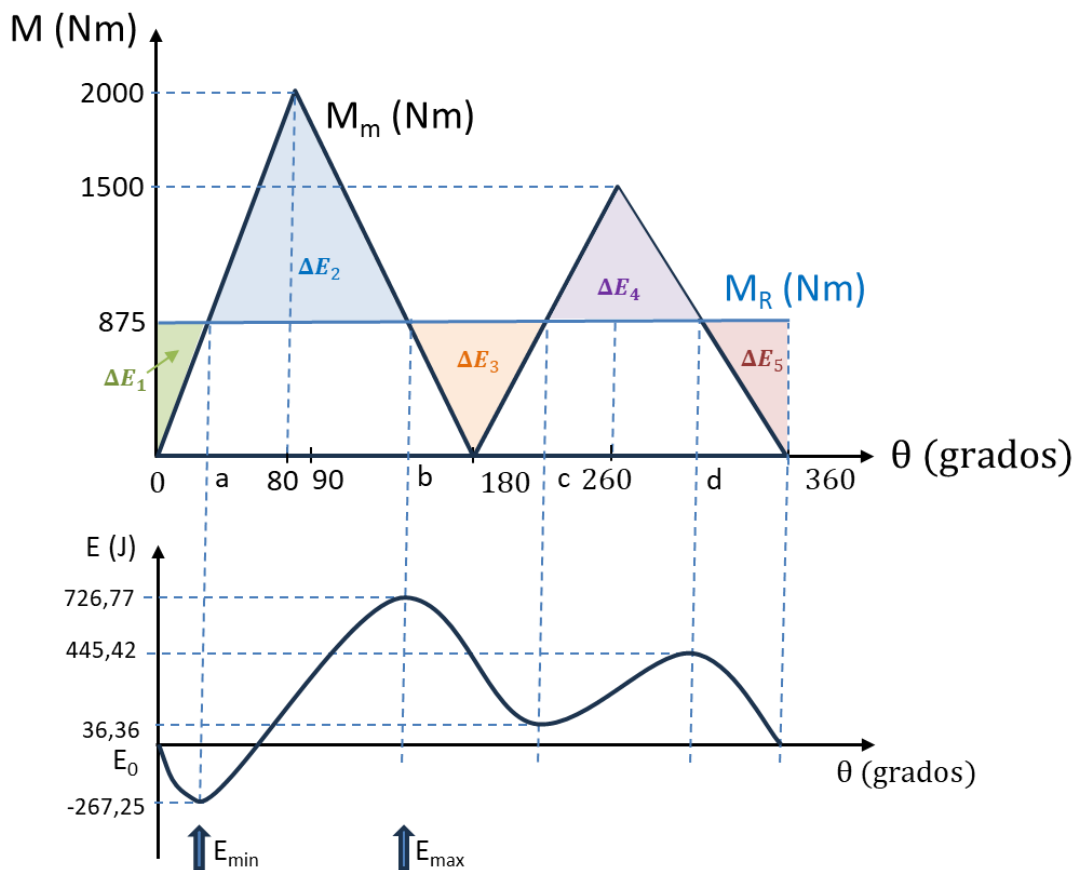
donde $\omega_m = 100 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{10\pi}{3} = 10.47 \text{ rad/seg}$

El valor de A se corresponde con la energía de la máquina obtenida entre los valores máximos y mínimos de la velocidad, que en el método aproximado se corresponden con los valores de máxima y mínima energía. Para ello calculamos la energía que se cede y se gana a lo largo del ciclo mediante la obtención de las áreas de los triángulos generados al restar el par motor del par resistente. Dichas áreas pueden (en la figura) obtenerse por semejanza de triángulos, aplicando el teorema de Tales para la obtención de los lados o determinando los puntos a, b, c y d como la intersección entre rectas. Aplicando Tales:

$$a = 80 \cdot \frac{875}{2000} = 35^\circ = 0,61 \text{ rad}, \overline{ab} = 180 \cdot \frac{2000-875}{2000} = 101,25^\circ = 1,77 \text{ rad},$$

$$\overline{bc} = \overline{b180} + \overline{180c} = (180 - 80) \cdot \frac{875}{2000} + (260 - 180) \cdot \frac{875}{1500} = 90,42^\circ = 1,58 \text{ rad}$$

$$\overline{cd} = 180 \cdot \frac{1500-875}{1500} = 75^\circ = 1,31 \text{ rad}, 360 - d = (360 - 260) \cdot \frac{875}{1500} = 58,33^\circ = 1,02 \text{ rad}$$



Intervalo	Incremento de energía cedida / absorbida (J)	Energía del sistema (Julios)
$[0, a]$	$\Delta E_1 = \int_0^a (M_m - M_R) \cdot d\theta = -\frac{a \cdot 875}{2} = -267,25$	$E_a = E_0 - 267,25$
$[a, b]$	$\Delta E_2 = \int_a^b (M_m - M_R) \cdot d\theta = \frac{\overline{ab} \cdot (2000 - 875)}{2} = 994,02$	$E_b = E_a + 994,02 = E_0 + 726,77$

Intervalo	Incremento de energía cedida / absorbida (J)	Energía del sistema (Julios)
[b, c]	$\Delta E_3 = \int_b^c (M_m - M_R) \cdot d\theta = -\frac{\overline{bc} \cdot (2000 - 875)}{2} = -690,40$	$E_c = E_b - 690,40 = E_0 + 36,36$
[c, d]	$\Delta E_4 = \int_c^d (M_m - M_R) \cdot d\theta = \frac{\overline{cd} \cdot (1500 - 875)}{2} = 409,06$	$E_d = E_c + 409,06 = E_0 + 445,42$
[d, 360]	$\Delta E_5 = \int_d^{360} (M_m - M_R) \cdot d\theta = -\frac{(360 - d) \cdot (875)}{2} - 445,42$	$E_{360} = E_d - 445,42 = E_0$

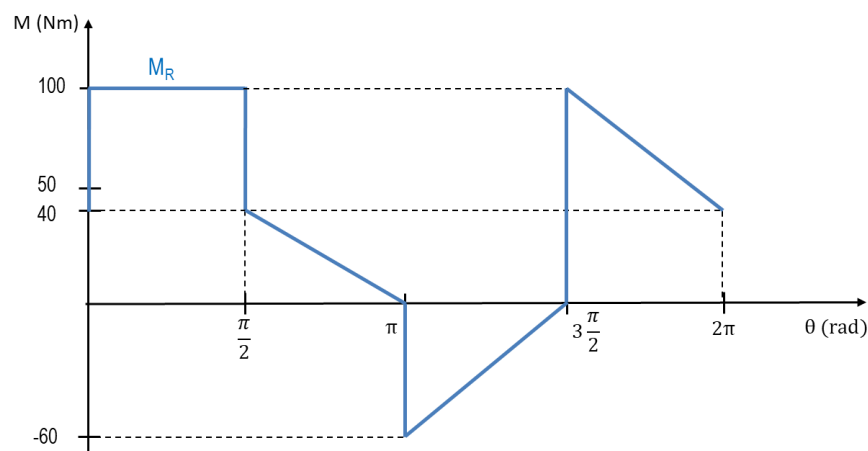
A la vista de los resultados el valor de A se corresponde con $\Delta E_2 = 994,02 \text{ J}$, por lo que $I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{994,02}{0,015 \cdot \left(\frac{10\pi}{3}\right)^2} \rightarrow I_v = 441,82 \text{ Kgm}^2$

La masa del volante obtiene considerando que se trata de un volante macizo de radio 1.75 m

$$I_v = 604,29 \text{ Kgm}^2 = m \cdot R^2 \rightarrow m = \frac{441,82}{1,75^2} \rightarrow \boxed{m = 197,32 \text{ Kg}}$$

11. Se dispone del diagrama de par resistente (M_R) en función del ángulo de giro (θ), que representa la variación de la carga durante un ciclo completo de una máquina rotativa. Para la resolución del ejercicio se considerará el par motor (M_M) y que la máquina opera a una velocidad de régimen media (ω_m) de 300 r.p.m.. Determinar los siguientes parámetros de la máquina y del volante de inercia que garantice que el grado de irregularidad de la máquina sea menor de 0,04:

- El par motor necesario.
- La potencia del motor, para un rendimiento del 90%.
- El momento de inercia del volante.
- El diámetro y la masa del volante macizo, para un ancho $b = 80 \text{ mm}$ (densidad del acero $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$).
- El diámetro y la masa del volante de llanta, para un ancho de $b = 80 \text{ mm}$ y espesor de llanta $t = 40 \text{ mm}$.
- La aceleración angular del volante en el ciclo.



Solución:

- a. El par motor necesario.

$$T_\phi = \int_0^\phi M \cdot d\phi \rightarrow \int_0^{2\pi} M_m \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} M_R \cdot d\theta$$

$$M_m \cdot 2\pi = 100 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{40 \cdot \pi/2}{2} - \frac{60 \cdot \pi/2}{2} + \frac{(100 - 40) \cdot \pi/2}{2} + 40 \cdot \frac{\pi}{2} = 80\pi \rightarrow \boxed{M_m = 40 Nm}$$

- b. La potencia del motor, para un rendimiento del 90%.

La potencia media de la máquina es:

$$P = M_m \cdot \omega_m = 40 \cdot 10\pi = 1,257 \text{ kW}$$

Considerando $\omega_m = 300 \text{ rpm} = 10\pi \text{ rad/seg}$

La potencia necesaria del motor, para mover la máquina, considerando un rendimiento del 90% será,

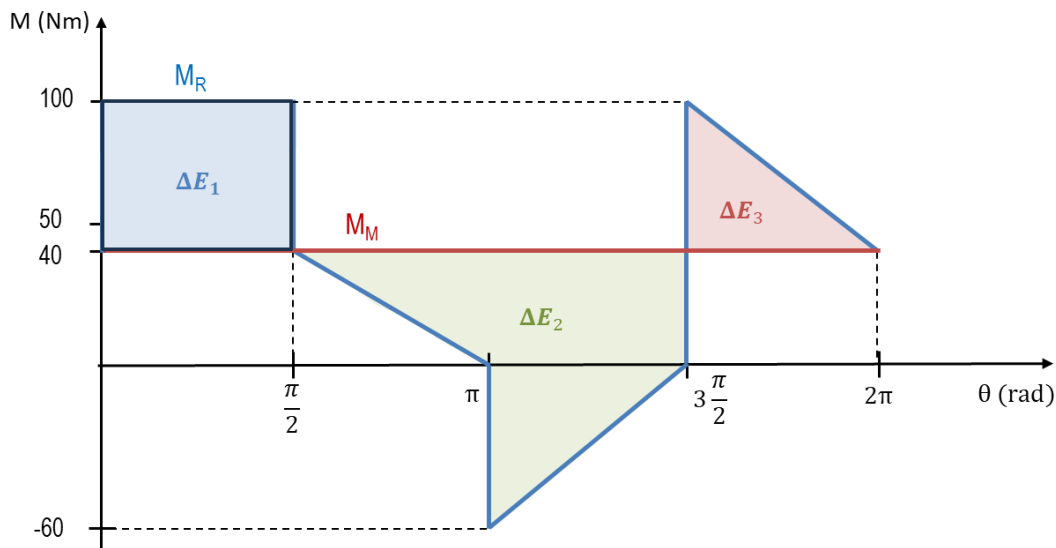
$$\boxed{P_{necesaria}} = \frac{P}{0,9} = \boxed{1.396 \text{ kW}}$$

- c. El momento de inercia del volante.

$$I_v = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2}$$

Donde $\delta = 0.04$

El valor de A se obtiene del análisis de energía a lo largo del ciclo.



$$\Delta E_1 = -\frac{\pi}{2} \cdot (100 - 40) = 30\pi \text{ J}$$

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 60 + \frac{\pi}{2} \cdot 40 = 45\pi \text{ J}$$

$$\Delta E_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (100 - 40) = 15\pi \text{ J}$$

Se considera que la energía al inicio del ciclo es E_0 , luego:

$$E(0) = E_0$$

$$E(\pi/2) = E(0) + \Delta E_1 = E_0 - 30\pi$$

$$E(3\pi/2) = E(\pi/2) + \Delta E_2 = E_0 - 30\pi + 45\pi = E_0 + 15\pi$$

$$E(2\pi) = E(0) = E_0 + \Delta E_3 = E_0 + 15\pi - 15\pi$$

$$(Luego \Delta E_2 = \Delta E_1 + \Delta E_3)$$

La energía máxima del volante se alcanza en $E(3\pi/2)$ y la energía mínima en $E(\pi/2)$.

$$E_{\min} = E(3\pi/2) = E_0 - 30\pi \quad (\text{luego en } \pi/2 \text{ se alcanzará la velocidad angular mínima})$$

$$E_{\max} = E(\pi/2) = E_0 + 15\pi \quad (\text{luego en } 3\pi/2 \text{ se alcanzará la velocidad angular máxima})$$

Siendo la máxima fluctuación de energía:

$$A = E_{\max} - E_{\min} = (E_0 + 15\pi) - (E_0 - 30\pi) = 45\pi J = 141,37J$$

Si se calcula el volante por el método aproximado:

$$I_V = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{45\pi}{0,04 \cdot (10\pi)^2} = 3,58 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- d. El diámetro y la masa del volante macizo, par aun ancho $b = 80 \text{ mm}$ (densidad del acero $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$).

$$I_V = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} (\rho \cdot b \cdot \pi \cdot R^2) \cdot R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot b \cdot \pi \cdot R^4$$

$$R = \sqrt[4]{\left(\frac{2 \cdot 3,58}{7800 \cdot 0,08 \cdot \pi}\right)} = 0,2458 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 0,4916 \text{ m}}$$

- e. El diámetro y la masa del volante de llanta, para un ancho de $b = 80 \text{ mm}$ y espesor de llanta $t = 40 \text{ mm}$.

$$I_V = m \cdot R^2 = (\rho \cdot t \cdot b \cdot 2 \cdot \pi \cdot R) \cdot R^2 = 2 \cdot \rho \cdot t \cdot b \cdot \pi \cdot R^3$$

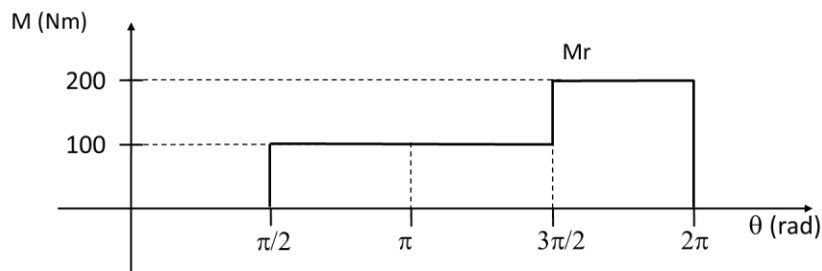
$$R = \sqrt[3]{\left(\frac{3,58}{2 \cdot 7800 \cdot 0,04 \cdot 0,08 \cdot \pi}\right)} = 0,284 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 0,568 \text{ m}}$$

- f. La aceleración angular del volante en el ciclo.

$$\varepsilon = \frac{M_M - M_R}{I_V} = \frac{M}{I_V}$$

12. Un mecanismo opera en régimen permanente y tiene una velocidad de rotación media (ω_m) de 76,4 r.p.m. En la figura se muestra el diagrama del par resistente (M_r), y el par motor (M_m) que tiene un valor constante. El mecanismo ya posee una inercia reducida constante (I_R) equivalente a 50 Kg m^2 . Se pide calcular ($g = 10 \text{ m/s}^2$):

- El valor de M_m y la potencia media necesaria del motor.
- Especificar el valor del volante de inercia que se debe añadir para lograr un grado de irregularidad de $\delta = 0.02$.
- Calcular los valores mínimo y máximo de la velocidad angular (con el volante de inercia).
- Calcular el diámetro del volante de inercia, si se utiliza un volante macizo de acero con un espesor de 8 cm. (La densidad del acero es de 7800 kg/m^3 .)

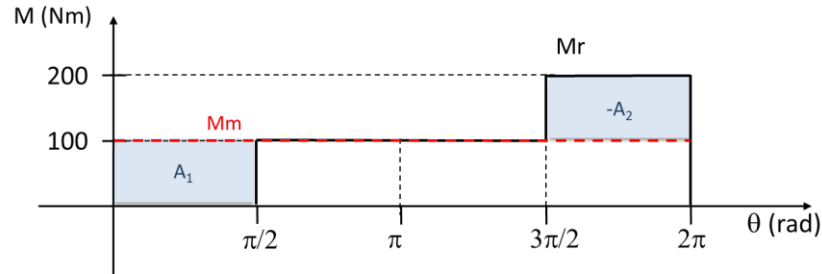


Solución:

- a. El valor de M_m y la potencia media necesaria del motor.

$$\boxed{M_m} = \frac{100 \cdot \pi + 200 \cdot \pi/2}{2\pi} = \boxed{100 \text{ Nm}}$$

- b. Especificar el valor del volante de inercia que se debe añadir para lograr un grado de irregularidad de $\delta = 0.02$.



En Estas condiciones el valor máximo de energía se consigue en $\theta = \pi/2$ y el valor mínimo en $\theta = 0$ o $\theta = 2\pi$, siendo este valor $A_1 = 100 \cdot \pi/2 = 50\pi = 157,08 \text{ J}$

$$I_V = \frac{A}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{157,08}{0,02 \cdot (1,33)^2} = 4417,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Donde $\omega_m = 76,4 \cdot 2\pi/60 = 1,33 \text{ rad/seg}$ y $\delta = 0,02$

- c. Calcular los valores mínimo y máximo de la velocidad angular (con el volante de inercia).

$$\omega_{max} = \omega_m \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) = 76,4 \cdot (1 + 0,01) = 77,16 \text{ rpm} = 1,35 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_{min} = \omega_m \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = 76,4 \cdot (1 - 0,01) = 75,63 \text{ rpm} = 1,32 \text{ rad/seg}$$

- d. Calcular el diámetro del volante de inercia, si se utiliza un volante macizo de acero con un espesor de 8 cm. (La densidad del acero es de 7800 kg/m^3 .)

$$I_V = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} (\rho \cdot b \cdot \pi \cdot R^2) \cdot R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot b \cdot \pi \cdot R^4$$

$$R = \sqrt[4]{\left(\frac{2 \cdot I_V}{\rho \cdot b \cdot \pi}\right)} = \sqrt[4]{\left(\frac{2 \cdot 4417,21}{7800 \cdot 0,08 \cdot \pi}\right)} = 1,457 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 2,91 \text{ m}}$$

13. Un motor de 47,12 kW de potencia media útil mueve una máquina rotativa que, a lo largo de un ciclo, requiere un par (par resistente, M_R) como el que se representa en el diagrama simplificado de la figura.

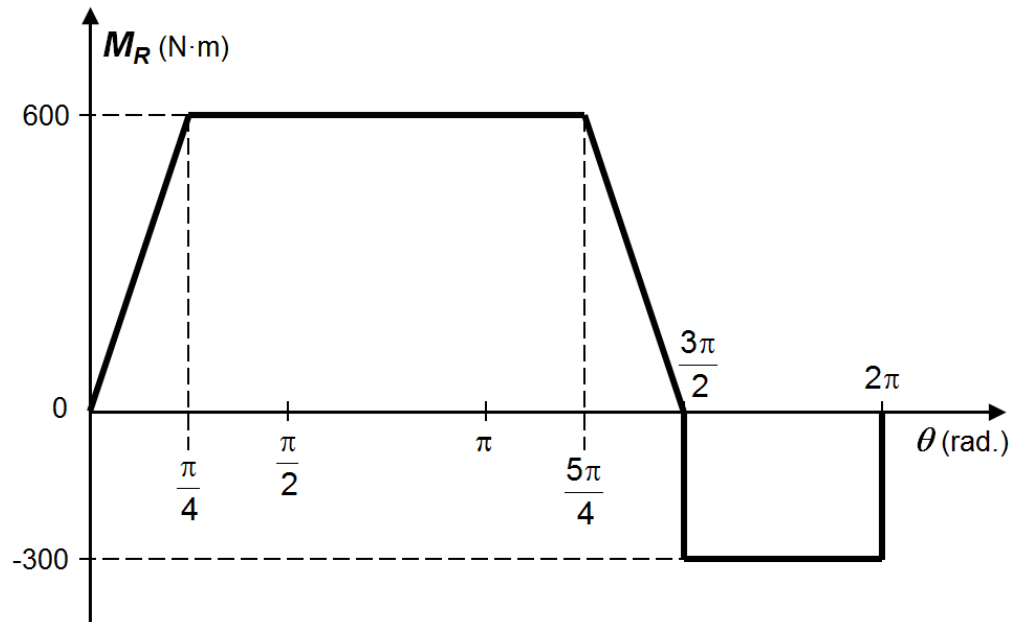
- a. Calcular el valor del par motor (M_m) constante que desarrolla la máquina y la velocidad media de ésta.

Para regular la máquina y conseguir un grado de irregularidad del sistema de un 2% de la velocidad media, se quiere implementar un volante de inercia macizo.

Se pide:

- b. Calcular el valor del volante de inercia requerido.

- c. Si el volante de inercia posee un diámetro de $D = 500 \text{ mm}$ y se realiza en fundición gris (densidad $\rho = 7250 \text{ kg/m}^3$), calcular el espesor del mismo.



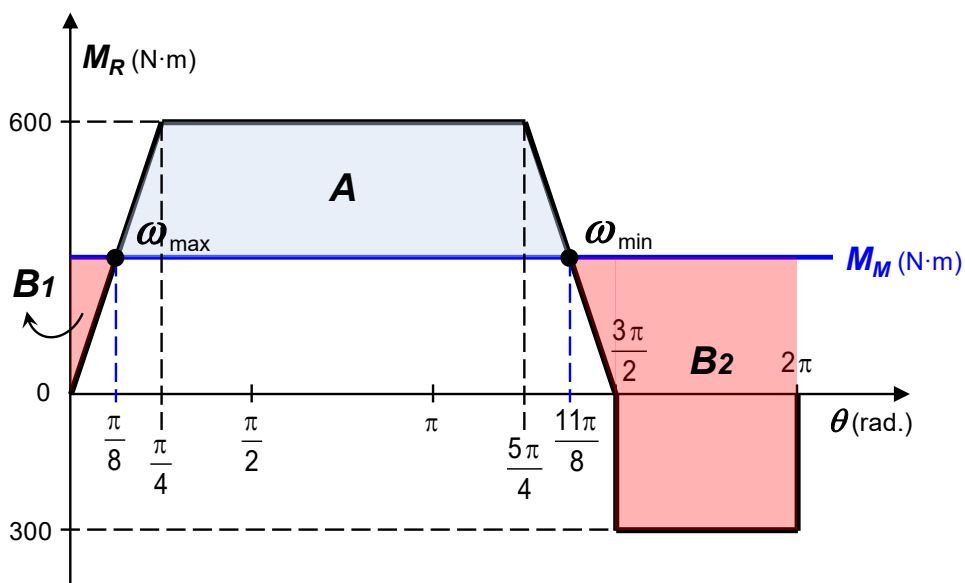
Solución:

- a. Calcular el valor del par motor (M_m) constante que desarrolla la máquina y la velocidad media de ésta.

$$\boxed{M_m} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 600\right) + (\pi \cdot 600) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 600\right) - \left(\frac{\pi}{2} \cdot 300\right)}{2\pi} = \boxed{300 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

$$P_m = M_m \cdot \omega_m \Rightarrow \omega_m = \frac{P_m}{M_m} = \frac{47120}{300} = 157,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- b. Calcular el valor del volante de inercia requerido.



En el cálculo del trabajo realizado por el par reducido (diferencia entre el par motor y el par resistente), se distinguen tres zonas:

$$B_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 300 = 58,9 \text{ Nm} \cdot \text{rad}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 300 + \pi \cdot 300 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 300 = 1060,3 \text{ Nm} \cdot \text{rad}$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 300 + \frac{\pi}{2} \cdot 600 = 1001,4 \text{ Nm} \cdot \text{rad}$$

Si se considera que la energía al inicio del ciclo es E_0 , entonces:

$$E(0) = E_0$$

$$E(\pi/8) = E(0) + B_1 = E_0 + B_1 = E_0 + 58,9$$

$$E(11\pi/8) = E(\pi/8) - A = E_0 + B_1 - A = E_0 + 58,9 - 1060,3 = E_0 - 1001,4$$

$$E(2\pi) = E(11\pi/8) + B_2 = E_0 + B_1 - A + B_2 = E_0 \quad (\text{Luego} \rightarrow A = B_1 + B_2)$$

La energía máxima del volante se alcanza en $E(\pi/8)$ y la energía mínima en $E(11\pi/8)$.

$$E_{\min} = E(11\pi/8) = E_0 - 1001,4 \text{ (se alcanza la velocidad angular mínima)}$$

$$E_{\max} = E(\pi/8) = E_0 + 58,9 \text{ (se alcanza la velocidad angular máxima)}$$

Siendo la máxima fluctuación de energía ($\Delta E = A$) el trabajo desplegado entre el instante de velocidad máxima y el de velocidad mínima:

$$\Delta E = E_{\max} - E_{\min} = (E_0 + 58,9) - (E_0 - 1001,4) = 1060,3 \text{ Nm} \cdot \text{rad} = 1060,3 \text{ J}$$

Calculando el volante por el método aproximado:

$$\boxed{I_V} = \frac{\Delta E}{\delta \cdot \omega_m^2} = \frac{1060,3}{0,02 \cdot (157,07)^2} = \boxed{2,15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

c. Si el volante de inercia posee un diámetro de $D = 500 \text{ mm}$ y se realiza en fundición gris (densidad $\rho = 7250 \text{ kg/m}^3$), calcular el espesor del mismo.

la masa del volante de inercia será: $m = \frac{2 \cdot I_V}{R^2} = \frac{2 \cdot 2,15}{0,25^2} = 68,8 \text{ kg}$

El espesor del volante (diámetro $\varnothing = 500 \text{ mm}$ ($R = 250 \text{ mm}$) y densidad $\rho = 7250 \text{ kg/m}^3$), será:

$$I_V = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} (\rho \cdot b \cdot \pi \cdot R^2) \cdot R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot b \cdot \pi \cdot R^4$$

$$b = \frac{2 \cdot I_V}{\rho \cdot \pi \cdot R^4} = \frac{2 \cdot 2,15}{7250 \cdot \pi \cdot 0,25^4} = 0,048 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 48 \text{ mm}}$$