uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

OpenCourseWare

TEORÍA DE MÁQUINAS

CRISTINA CASTEJÓN SISAMÓN

EDUARDO CORRAL ABAD

RAÚL GISMEROS MORENO

MARIA JESÚS GÓMEZ GARCÍA

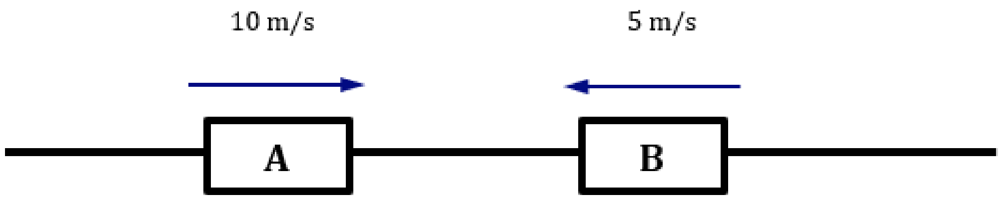
JESÚS MENESES ALONSO

HIGINIO RUBIO ALONSO

ABRAHAM VADILLO MORILLAS

Ejercicios de Choques y percusiones

1. Dos objetos A y B se mueven a lo largo de una guía lubricada (sin fricción) con velocidades 10 y 5 m/s, respectivamente, en sentidos opuestos, llegando a colisionar en un momento determinado. Se conoce las masas de los cuerpos, m_A = 4 kg y m_B = 2 kg, así como el coeficiente de restitución que caracteriza el choque, e = 1.



Se pide:

a) Calcular las velocidades de los objetos, incluyendo su sentido, después de la colisión.
b) Comparar la energía cinética de las dos masas antes y después del choque.
c) Obtener la velocidad del centro de masas del sistema antes y después del impacto.
d) Confirmar que los resultados obtenidos en b) y c) son consistentes con lo esperado según los datos proporcionados.

SOLUCIÓN

Calcular las velocidades de los objetos, incluyendo su sentido, después de la colisión.

Es un caso de choque central directo. Se plantea, por un lado, el Teorema de la Cantidad de Movimiento:

$$m_A v_i^A + m_B v_i^B = m_A v_f^A + m_B v_f^B$$

Y por otro, la definición del coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v_f^A - v_f^B}{v_i^A - v_i^B}$$

De forma que se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$4 \cdot 10 + 2 \cdot (-5) = 4 \cdot v_f^A + 2 \cdot v_f^B$$

$$1 = -\frac{v_f^A - v_f^B}{15} \rightarrow 15 = -v_f^A + v_f^B \rightarrow v_f^A = -15 + v_f^B$$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera se obtiene el valor de una de las velocidades

$$30 = -60 + 4v_f^B + 2 \cdot v_f^B \rightarrow v_f^B = 15 m/s$$

Y se despeja el otro término

$$v_f^A = 0m/s$$

Comparar la energía cinética de las dos masas antes y después del choque.

Se calcula la energía antes del choque

$$E_{c,i} = \frac{1}{2}m_A\left(v_i^A\right)^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v_i^B\right)^2 = 225J$$

Y después

$$E_{c,f} = \frac{1}{2}m_A\left(v_f^A\right)^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v_f^B\right)^2 = 225J$$

Obtener la velocidad del centro de masas del sistema antes y después del impacto.

La velocidad del centro de masas es la media ponderada de las velocidades considerando las masas de cada cuerpo. Esta expresión se deriva de calcular el momento lineal del sistema completo:

$$m_{CM}v_i^{CM} = \left(m_A + m_B\right)v_i^{CM}$$

$$v_i^{CM} = \frac{m_A v_i^A + m_B v_i^B}{m_A + m_B} = 5m/s$$

$$v_f^{CM} = \frac{m_A v_f^A + m_B v_f^B}{m_A + m_B} = 5m/s$$

Confirmar que los resultados obtenidos en b) y c) son consistentes con lo esperado según los datos proporcionados.

Los resultados tienen sentido, pues al ser un choque totalmente elástico no se produce disipación de energía durante la colisión.

2. Dado el sistema descrito en el Problema 1, se considera que el choque tiene en esta ocasión una restitución de valor e = 0. Recalcule únicamente los parámetros necesarios (no es necesario repetir toda la resolución).

SOLUCIÓN

a) $v_f^A = v_f^B = 5m/s$

b) $E_{c,i} = \frac{1}{2}m_A\left(v_i^A\right)^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v_i^B\right)^2 = 225J$

$$E_{c,f} = \frac{1}{2}m_A\left(v_f^A\right)^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v_f^B\right)^2 = 75J$$

c) $v_i^{CM} = \frac{m_A v_i^A + m_B v_i^B}{m_A + m_B} = 5m/s$

$$v_f^{CM} = \frac{m_A v_f^A + m_B v_f^B}{m_A + m_B} = 5m/s$$

3. Dado el sistema descrito en el Problema 1, se considera que el choque tiene en esta ocasión una restitución de valor e = 0,5. Recalcule únicamente los parámetros necesarios (no es necesario repetir toda la resolución).

SOLUCIÓN

a)

$$4\cdot 10 + 2\cdot(-5) = 4\cdot v_f^A + 2\cdot v_f^B$$

$$0,5 = -\frac{v_f^A - v_f^B}{15} \rightarrow 7,5 = -v_f^A + v_f^B \rightarrow v_f^A = -7,5 + v_f^B$$

$$30 = -30 + 4v_f^B + 2\cdot v_f^B \rightarrow v_f^B = 10 m/s$$

$$v_f^A = 2,5 m/s$$

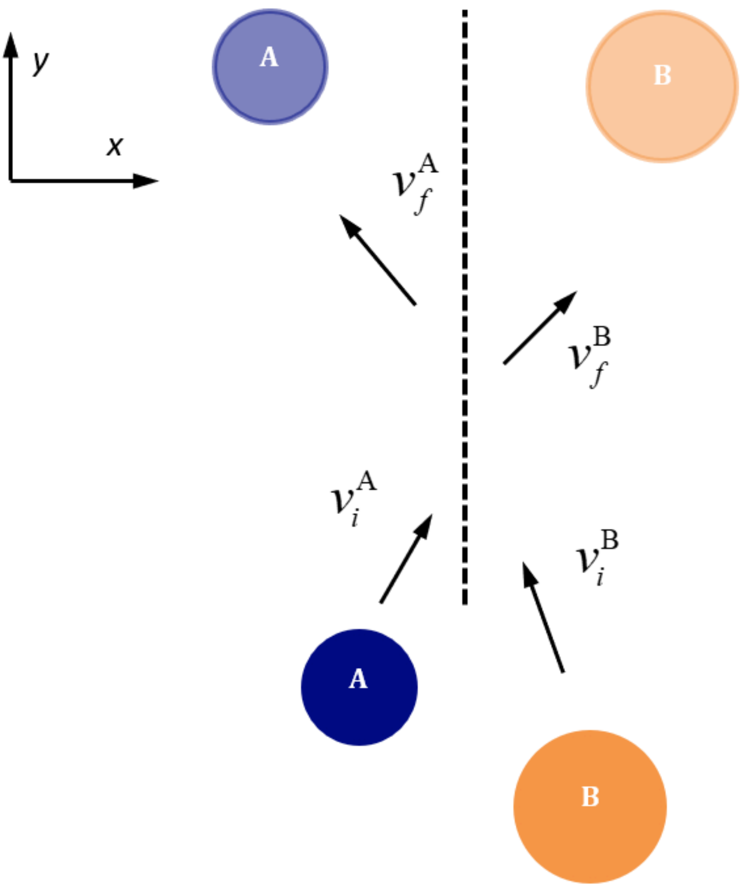
b) $E_{c,i} = \frac{1}{2} m_A \left(v_i^A\right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(v_i^B\right)^2 = 225 J$

$$E_{c,f} = \frac{1}{2} m_A \left(v_f^A\right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(v_f^B\right)^2 = 112,5 J$$

c) $v_i^{CM} = \frac{m_A v_i^A + m_B v_i^B}{m_A + m_B} = 5 m/s$

$$v_f^{CM} = \frac{m_A v_f^A + m_B v_f^B}{m_A + m_B} = 5 m/s$$

4. Considere el sistema descrito debajo, en el que dos objetos A y B experimentan un choque oblicuo sin fricción. Se conocen las velocidades de los cuerpos previas a la colisión, definidas en el sistema de coordenadas *xy*, $v_i^A = (5\vec{i} + 1\vec{j})$ m/s y $v_i^B = (-2\vec{i} + 2\vec{j})$ m/s, así como las masas de los cuerpos, m_A = 2 kg y m_B = 6 kg.



Conociendo que el coeficiente de restitución es e = 0,5, se pide:

a) Calcular las velocidades de los objetos después de la colisión, en coordenadas del sistema de referencia *xy*.
b) Comparar la velocidad del centro de masas del sistema antes y después del choque.
c) Obtener los valores de energía cinética antes y después del impacto.
d) Confirmar que los resultados obtenidos en b) y c) son consistentes con lo esperado según los datos proporcionados.

SOLUCIÓN

Calcular las velocidades de los objetos después de la colisión, en coordenadas del sistema de referencia *xy*.

Se aplica la conservación de la cantidad de movimiento a las componentes normales

$$m_A v^A_{n,i} + m_B v^B_{n,i} = m_A v^A_{n,f} + m_B v^B_{n,f}$$

La definición del coeficiente de restitución se aplica a las componentes normales de las velocidades

$$e = - \frac{v^A_{n,f} - v^B_{n,f}}{v^A_{n,i} - v^B_{n,i}}$$

Resolviendo

$$m_A v^A_{n,i} + m_B v^B_{n,i} = 5\cdot 2 - 6\cdot 2 = - 2 = m_A v^A_{n,f} + m_B v^B_{n,f}$$

$$0,5\cdot(5 - (-2)) = -\left(v^A_{n,f} - v^B_{n,f}\right)$$

$$- 2 = 2\cdot v^A_{n,f} + 21 + 6\cdot v^A_{n,f} \rightarrow v^A_{n,f} = - 2,875 m/s$$

$$v^B_{n,f} = 3,5 + v^A_{n,f} = 0,625 m/s$$

Las componentes tangenciales al impacto se mantienen (ver diapositiva 32 -31 en el pdf-):

$$v^A_{n,f} = v^A_{n,i} = 1 m/s$$

$$v^B_{n,f} = v^B_{n,i} = 2 m/s$$

Por tanto, los vectores de las velocidades de los cuerpos A y B tras el choque son:

$$v^A_f = \left(- 2,875\vec{i} + \vec{j}\right) m/s$$

$$v^B_f = \left(0,625\vec{i} + 2\vec{j}\right) m/s$$

Comparar la velocidad del centro de masas del sistema antes y después del choque.

Se calculan los valores de forma análoga al Problema 1, distinguiendo en las direcciones normal y tangencial:

$$v^{CM}_{n,i} = \frac{m_A v^A_{n,i} + m_B v^B_{n,i}}{m_A + m_B} = - 0,25 m/s$$

$$v^{CM}_{t,i} = \frac{m_A v^A_{t,i} + m_B v^B_{t,i}}{m_A + m_B} = 1,75 m/s$$

$$v_{n,f}^{CM} = \frac{m_A v_{n,f}^{A} + m_B v_{n,f}^{B}}{m_A + m_B} = -\ 0,25 m/s$$

$$v_{t,f}^{CM} = \frac{m_A v_{t,f}^{A} + m_B v_{t,f}^{B}}{m_A + m_B} = 1,75 m/s$$

Obtener los valores de energía cinética antes y después del impacto.

Se calculan los módulos de las velocidades antes y después de la colisión:

$$v_i^A = \sqrt{5^2 + 1^2} = 5,099 m/s$$

$$v_i^B = \sqrt{(-\ 2)^2 + 2^2} = 2,828 m/s$$

$$v_f^A = \sqrt{(-\ 2,875)^2 + 1^2} = 3,044 m/s$$

$$v_f^B = \sqrt{(0,625)^2 + 2^2} = 2,095 m/s$$

$$E_{c,i} = \frac{1}{2} m_A \left(v_i^A\right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(v_i^B\right)^2 = 50 J$$

$$E_{c,f} = \frac{1}{2} m_A \left(v_f^A\right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(v_f^B\right)^2 = 22,44 J$$

Confirmar que los resultados obtenidos en b) y c) son consistentes con lo esperado según los datos proporcionados.

Los resultados tienen sentido, el centro de masas del sistema mantiene su velocidad antes y después del impacto, mientras que la energía cinética disminuye

5. Dado el sistema descrito en el Problema 4, se considera que el choque tiene en esta ocasión una restitución de valor e = 0. Recalcule únicamente los parámetros necesarios (no es necesario repetir toda la resolución).

SOLUCIÓN

a)

$$m_A v_{n,i}^A + m_B v_{n,i}^B = 5\cdot 2 - 6\cdot 2 = - 2 = m_A v_{n,f}^A + m_B v_{n,f}^B$$

$$0\cdot(5 - (- 2)) = - \left(v_{n,f}^A - v_{n,f}^B\right) \rightarrow v_{n,f}^A = v_{n,f}^B$$

$$- 2 = 2\cdot v_{n,f}^A + 6\cdot v_{n,f}^A \rightarrow v_{n,f}^A = v_{n,f}^B = - 0,25 m/s$$

Las componentes tangenciales al impacto se mantienen:

$$v_{n,f}^A = v_{n,i}^A = 1 m/s$$

$$v_{n,f}^B = v_{n,i}^B = 2 m/s$$

Por tanto, los vectores de las velocidades de los cuerpos A y B tras el choque son:

$$v_f^A = \left(- 0,25\vec{i} + \vec{j}\right) m/s$$

$$v_f^B = \left(- 0,25\vec{i} + 2\vec{j}\right) m/s$$

b)

$$v_{n,f}^{CM} = \frac{m_A v_{n,f}^A + m_B v_{n,f}^B}{m_A + m_B} = - 0,25 m/s$$

$$v_{t,f}^{CM} = \frac{m_A v_{t,f}^A + m_B v_{t,f}^B}{m_A + m_B} = 1,75 m/s$$

c)

$$v_f^A = \sqrt{(- 0,25)^2 + 1^2} = 1,031 m/s$$

$$v_f^B = \sqrt{(- 0,25)^2 + 2^2} = 2,016 m/s$$

$$E_{c,f} = \frac{1}{2} m_A \left(v_f^A\right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(v_f^B\right)^2 = 13,25 J$$

6. Dado el sistema descrito en el Problema 4, se considera que el choque tiene en esta ocasión una restitución de valor e = 1. Recalcule únicamente los parámetros necesarios (no es necesario repetir toda la resolución).

SOLUCIÓN

a)

$$m_A v_{n,i}^{A} + m_B v_{n,i}^{B} = 5\cdot2 - 6\cdot2 =- 2 = m_A v_{n,f}^{A} + m_B v_{n,f}^{B}$$

$$1\cdot(5 - (-2)) =- \left(v_{n,f}^{A} - v_{n,f}^{B}\right) \rightarrow 7 =- v_{n,f}^{A} + v_{n,f}^{B}$$

$$-2 = 2\cdot v_{n,f}^{A} + 42 + 6\cdot v_{n,f}^{A} \rightarrow v_{n,f}^{A} =- 5,5 m/s$$

$$v_{n,f}^{B} = 1,5 m/s$$

Las componentes tangenciales al impacto se mantienen:

$$v_{n,f}^{A} = v_{n,i}^{A} = 1 m/s$$

$$v_{n,f}^{B} = v_{n,i}^{B} = 2 m/s$$

Por tanto, los vectores de las velocidades de los cuerpos A y B tras el choque son:

$$v_f^{A} = \left(-5,5\vec{i} + \vec{j}\right) m/s$$

$$v_f^{B} = \left(1,5\vec{i} + 2\vec{j}\right) m/s$$

b)

$$v_{n,f}^{CM} = \frac{m_A v_{n,f}^{A} + m_B v_{n,f}^{B}}{m_A + m_B} =- 0,25 m/s$$

$$v_{t,f}^{CM} = \frac{m_A v_{t,f}^{A} + m_B v_{t,f}^{B}}{m_A + m_B} = 1,75 m/s$$

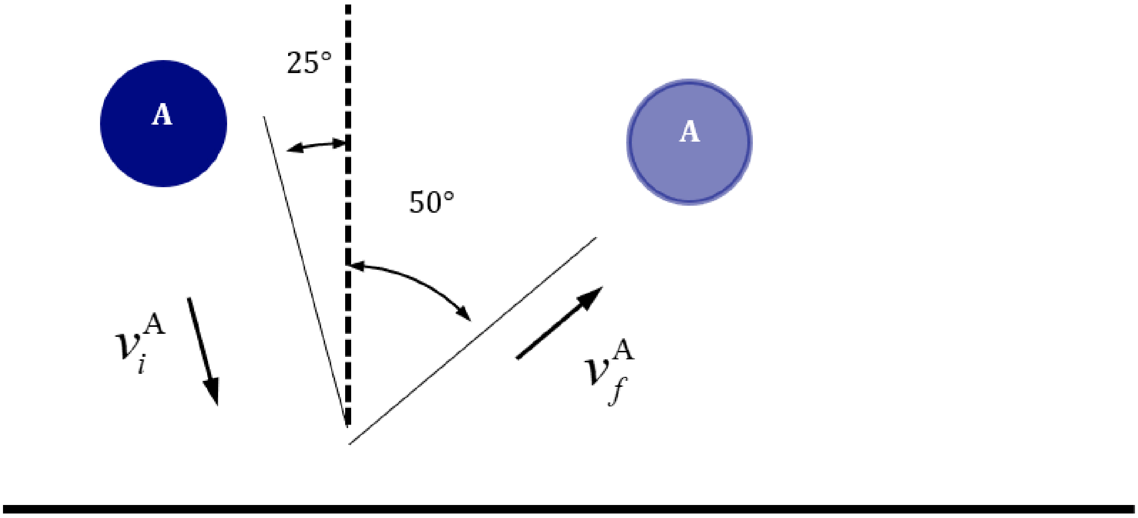
c)

$$v_f^{A} = \sqrt{(-5,5)^2 + 1^2} = 5,59 m/s$$

$$v_f^{B} = \sqrt{(1,5)^2 + 2^2} = 2,50 m/s$$

$$E_{c,f} = \frac{1}{2} m_A \left(v_f^{A}\right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(v_f^{B}\right)^2 = 50 J$$

7. Considere el sistema descrito debajo, en el que un objeto A impacta contra una superficie plana infinita con un ángulo de 25° con respecto a la normal. Tras el choque, el objeto A sale despedido con una dirección que forma con la normal un ángulo de valor 50° (el doble con respecto a las condiciones iniciales). Teniendo en cuenta que se desprecian las fuerzas de fricción, determine el valor del coeficiente de restitución.



SOLUCIÓN

En un choque oblicuo entre un objeto y una superficie plana infinita (cuerpo rígido masivo), se considera que la velocidad de este último solido es nula, por lo que el coeficiente de restitución se define como:

$$e = \frac{v_{n,f}^{A} - v_{n,f}^{B}}{v_{n,i}^{B} - v_{n,i}^{A}} = \frac{v_{n,f}^{A} - 0}{0 - v_{n,i}^{A}} = - \frac{v_{n,f}^{A}}{v_{n,i}^{A}}$$

Por otro lado, es posible relacionar el grado de disipación de energía del impacto con las direcciones anterior y posterior al impacto:

$$e = \frac{\tan tan\, \theta_i}{\tan tan\, \theta_f}$$

Donde los ángulos se miden con respecto a la normal a la superficie plana. Así, se tiene un valor:

$$e = \frac{\tan tan\, (25º)}{\tan tan\, (50º)} = 0,39$$

8. Considere un sistema como el descrito arriba, en el que un objeto A impacta contra una superficie plana infinita. En este caso, el cuerpo A se aproxima a la superficie con un ángulo de 10° con respecto a la horizontal. Tras el choque, el objeto A sale despedido con una dirección que forma con la horizontal un ángulo de valor 5°. Teniendo en cuenta que no se consideran fuerzas de fricción, determine el valor del coeficiente de restitución.

SOLUCIÓN

Se procede de forma análoga al problema anterior, teniendo en cuenta que los ángulos dados son definidos con respecto a la horizontal:

$$e = \frac{\tan tan\,(90º-10º)}{\tan tan\,(90º-5º)} = 0,496 \simeq 0,5$$

9. Se tiene un sistema como el descrito en el Problema 7. En esta ocasión, el cuerpo A se mueve con una velocidad de 5 m/s en una dirección que forma 45° con la normal a la superficie. Se ha comprobado que el choque, sin fricción, presenta un coeficiente de restitución de valor *e* = 0,3. Calcule los siguientes valores:

   a) El ángulo que forma el cuerpo A con la normal tras el impacto.
   b) El valor de la componente normal de la velocidad tras la colisión.
   c) El módulo de la velocidad del cuerpo tras el impacto.

SOLUCIÓN

a) El ángulo que forma el cuerpo A con la normal tras el impacto.

Aplicando la definición vista en el Problema 7, se tiene:

$$e = \frac{\tan tan\left(\theta_i\right)}{\tan tan\left(\theta_f\right)} = \frac{\tan tan\,(45º)}{\tan tan\left(\theta_f\right)} \rightarrow \theta_f = 73,30º$$

b) El valor de la componente normal de la velocidad tras la colisión.

Como en el caso de impacto central oblicuo, la definición de coeficiente de restitución se aplica únicamente a las componentes normales:

$$e = \frac{v^A_{n,f} - v^B_{n,f}}{v^B_{n,i} - v^A_{n,i}} = \frac{v^A_{n,f} - 0}{0 - v^A_{n,i}} = - \frac{v^A_{n,f}}{v^A_{n,i}}$$

La componente inicial tiene un valor:

$$v^A_{n,i} = - 5\cdot \cos cos\,(45º) = - 3,535 m/s$$

La velocidad tras el choque es:

$$v^A_{n,f} = - e\cdot v^A_{n,i} = - 0,3\cdot(- 5\cdot \cos cos\,(45º)) = 1,061 m/s$$

c) El módulo de la velocidad del cuerpo tras el impacto.

Como en el caso de choque central oblicuo, las componentes tangenciales se mantienen a lo largo del choque:

$$v^A_{t,f} = v^A_{t,i} = 5\cdot \sin sin\,(45º) = 3,535 m/s$$

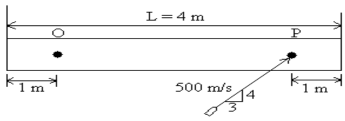
Se suman las dos componentes

$$v^A_f = \sqrt{\left(v^A_{n,f}\right)^2 + \left(v^A_{t,f}\right)^2} = 3,691 m/s$$

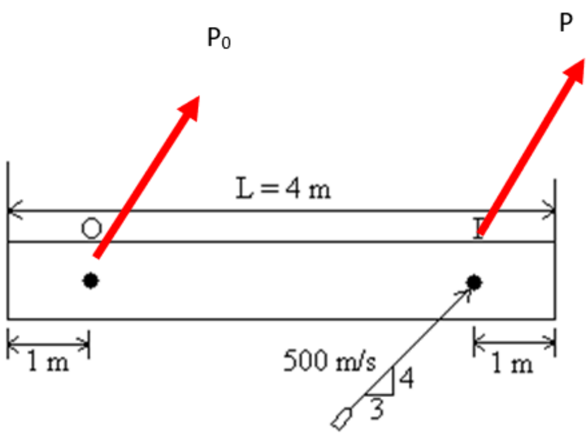
10. Una varilla de 50 Kg de masa y de 4 m de longitud, gira en un plano horizontal alrededor de un eje vertical que pasa por el punto O. En un instante dado, estando la varilla con una velocidad angular de w=5 rad/s en sentido antihorario, recibe el impacto en el punto P de una bala de 0,1 Kg de masa con una velocidad de 500 m/s, haciendo un ángulo de 53,13º con la horizontal, tal y como se muestra en la figura: ($\varepsilon = 0$)

Determinar:

a) la velocidad angular de la varilla justo después del impacto.
b) La percusión en el punto O.



SOLUCIÓN



$$\vec{w}_1 = (0, 0, 5)(rad/s) = 5\vec{k}(rad/s);$$

$\vec{v}_{G1} = (0, 5, 0)m/s$ $\quad \vec{v}_{G1}$ = (OG).$\vec{w}_1$

$$\vec{v}_{B1} = (300, 400, 0)m/s$$

$$\overline{p}_o = (p_{ox}, p_{oy}, 0)$$

$$\overline{p} = (p_x, p_y, 0)$$

$$\vec{v}_{G2} = (0,(4\,)w_2, 0) = (0, w_2, 0) m/s$$

$\vec{v}_{B2} = \vec{v}_{p2} = \vec{v}_{G2} + \vec{w}_2 x\vec{GP} = \vec{w}_2 x\vec{OP} = 2w_2\vec{j}$ $(\varepsilon = 0)$

Se tienen 5 incógnitas y se deben plantear 5 ecuaciones:

1) $M\left(\vec{v}_{G2} - \vec{v}_{G1}\right) = \vec{P} + \vec{P}_0$
2) $m\left(\vec{v}_{B2} - \vec{v}_{B1}\right) = \vec{P}_B = -\vec{P}$
3) $\vec{L}_{02} - \vec{L}_{01} = I_0(w\rightarrow_2 - w\rightarrow_1) = \sum \vec{r}_{io} \times P_{ext_i} = op\rightarrow \times P\rightarrow$

$$op\rightarrow \times P\rightarrow = \left| ijk\ 200\ P_x P_y 0 \right| = 2P_y\vec{k}$$

$I_{Z_O} = I_{Z_G} + Md^2 cond^2 = 1^2$ $\quad I_0 = \frac{1}{12}ML^2 + M(4\,)^2 = 116,67 Kgm^2$

1) $0=P_x+P_{ox}$

$50(w_2-5)=P_y+P_{oy}$

2) $0.1(-300)=-P_x$

$0.1(2w_2-400)=-P_y$

3) $116.67(w_2-5)=2P_y$

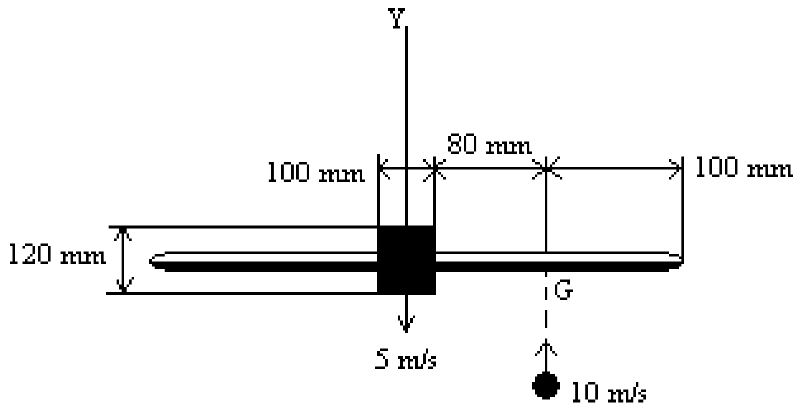
P_x=30Ns

P_{ox}=-30Ns

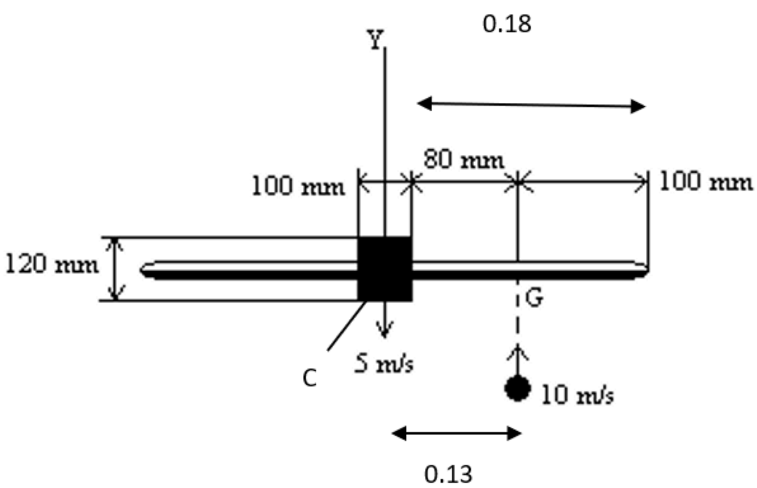
P_y=38.87Ns

$$\vec{w}_2 = 5,67\vec{k}(rad/s); P_{OX} = -\ 30N\cdot s; P_{OY} = -\ 5,37 N\cdot s$$

11. Un sistema está formado por una placa rectangular A de 20 N de peso tiene fijadas a ella dos placas de 10 N de peso cada una, tal y como se muestra en la figura siguiente. La placa se mueve sobre una superficie lisa y plana con velocidad de 5 m/s. Un disco B, de 10 N de peso, se mueve en dirección opuesta con una velocidad de 10 m/s. Una colisión perfectamente elástica ($\varepsilon = 1$) tiene lugar en G. ¿Cuál será la velocidad del centro del sistema inmediatamente después de la colisión?



SOLUCIÓN



$$\varepsilon = 1 = \frac{\vec{v}_{B2}-\vec{v}_{G2}}{\vec{v}_{G1}-\vec{v}_{B1}} = \frac{\vec{v}_{B2}-\vec{v}_{G2}}{-5-10} \Rightarrow \vec{v}_{G2} - \vec{v}_{B2} = 15\vec{j}$$

$\vec{v}_{G2} = 15 + \vec{v}_{B2}\vec{j}$ (1)

La percusión sobre el cuerpo externo es perpendicular a la superficie de contacto, es decir, tiene sentido $\vec{j}$.

$P_G=P\vec{j}$

La percusión sobre el disco es la opuesta

$P_B=-P_G=-P\vec{j}$

Sólido A:

$$\vec{v}_{C1} =- 5j\rightarrow$$

Cantidad de movimiento: $m_A\vec{v}_{C2} - m_A\vec{v}_{C1} =+ \vec{P}(2)$

$$\vec{v}_{C2} =- 5 + \frac{\vec{P}g}{40}$$

$\vec{L}_{C2} - \vec{L}_{C1} = I_C(w\rightarrow_2 - w\rightarrow_1) = \sum \vec{r}_{io} \times P_{ext_i} = CG\rightarrow \times P\rightarrow_G$

Momento Cinético $I_c\vec{w}_2\vec{k} = |i \quad j \quad k\, 0,13\, 0 \quad 0\, 0 \quad p \quad 0\,| = 0,13P\vec{k}$

$$LaI_C = \frac{1}{12}\frac{20}{g}\left[0,1^2 + 0,12^2\right] + 2\frac{1}{12}\left(\frac{10}{g}\right)\cdot 0,18^2 + 2\frac{10}{g}\cdot 0,14^2 = 0,0496Kgm^2$$

$$\vec{w}_2 = \frac{0,13P}{I_C}$$

Sólido B:

Cantidad de movimiento: $m_B\vec{v}_{B2} - m_B\vec{v}_{B1} =- \vec{P}\vec{v}_{B_2} = \frac{m_B}{m_B}\vec{v}_{B1} - \frac{\vec{P}}{m_B} \Rightarrow \vec{v}_{B_2} = 10 - \frac{\vec{P}g}{10}$

Además $\vec{v}_{G_2} = \vec{v}_{C_2} + \vec{w}\times CG$

$$\vec{v}_{G2} = \vec{v}_{C2} + \vec{w} \cdot 0,13 = (1) = \vec{v}_{B2} + 15$$

$$5 ecuaciones y v_{C_2}, v_{B_2}, w_2, P, v_{G_2} \equiv 5 incógnitas$$

Lo pasamos todo en función de P en $\vec{v}_{G2} = \vec{v}_{B2} + 15$

Donde $\vec{v}_{B_2} = 10 - \frac{\vec{P}g}{10}$

$$\vec{v}_{G2} = \vec{v}_{C2} + \vec{w}_2 \cdot 0,13$$

$$\vec{w}_2 = \frac{0,13P}{I_C}$$

$$-5 + \frac{\vec{P}g}{40} + \frac{0,13^2\vec{P}}{I_C} = 10 - \frac{\vec{P}g}{10} + 15 \Rightarrow \vec{P}\left(\frac{g}{40} + \frac{g}{10} + \frac{0,13^2}{I_C}\right) = 30$$

$$\vec{P} = \frac{30}{\left(\frac{9}{40} + \frac{g}{10} + \frac{0,132}{I_z}\right)} = 19,196 N \cdot s\vec{j}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{0,13P}{I_C} = 50,18 \frac{rad}{s}\vec{k}(3)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{C2} = -0,305 \frac{m}{s}\vec{j}$$

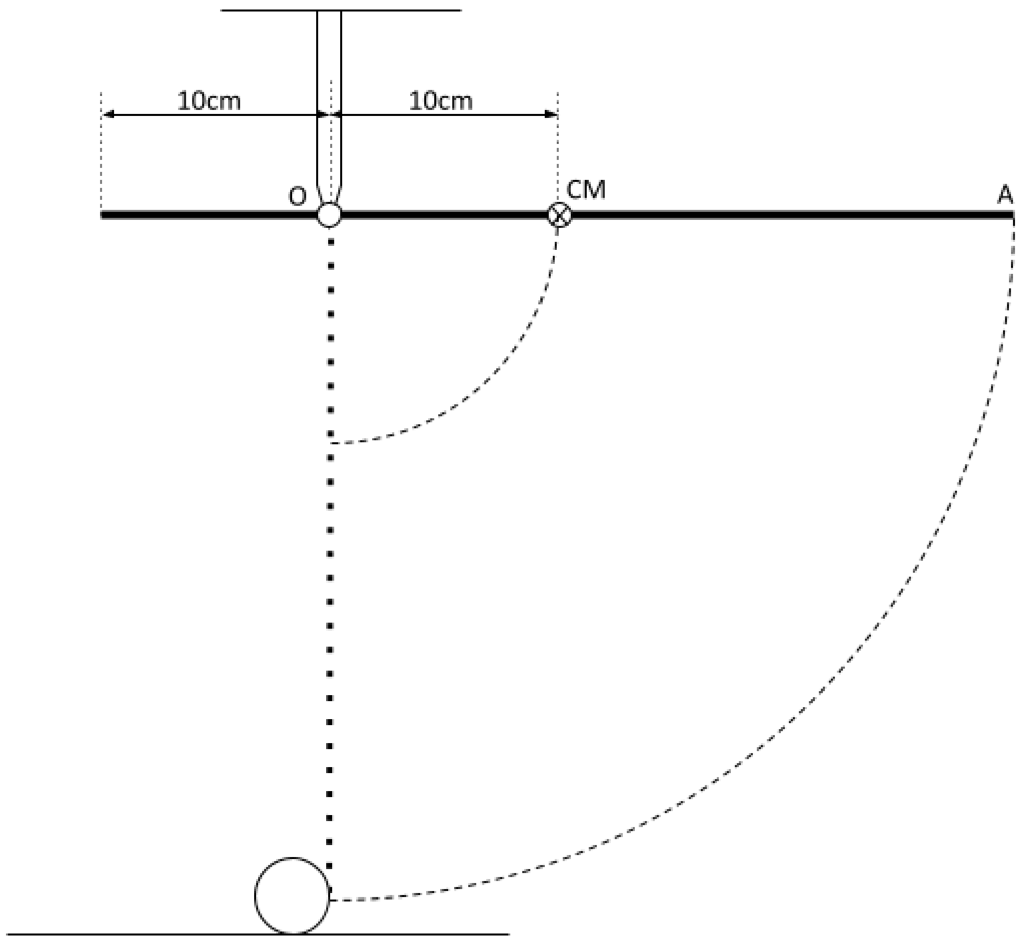
$$\vec{v}_{B2} = 10 - \frac{\vec{P}g}{10} = -8,78 m/s\vec{j}$$

$$\vec{v}_{G2} = 15 + \vec{v}_{B2} = 6.22\vec{j}$$

El punto de giro está entre G y C, muy cerca de C.

12. La barra de la figura, de longitud L=40cm y masa m=0.5kg, puede girar libremente alrededor de la articulación O. Partiendo del reposo desde la posición horizontal, cuando llega a la posición vertical su extremo A golpea una bola en reposo. Después del impacto la barra se queda quieta. Si el choque es totalmente elástico, Calcular:

1. La velocidad angular de la barra justo antes de golpear a la bola.
2. Las percusiones sufridas por la barra en los puntos A y O.
3. La masa que debe tener la bola para que la barra se quede quieta tras el golpe.



SOLUCIÓN

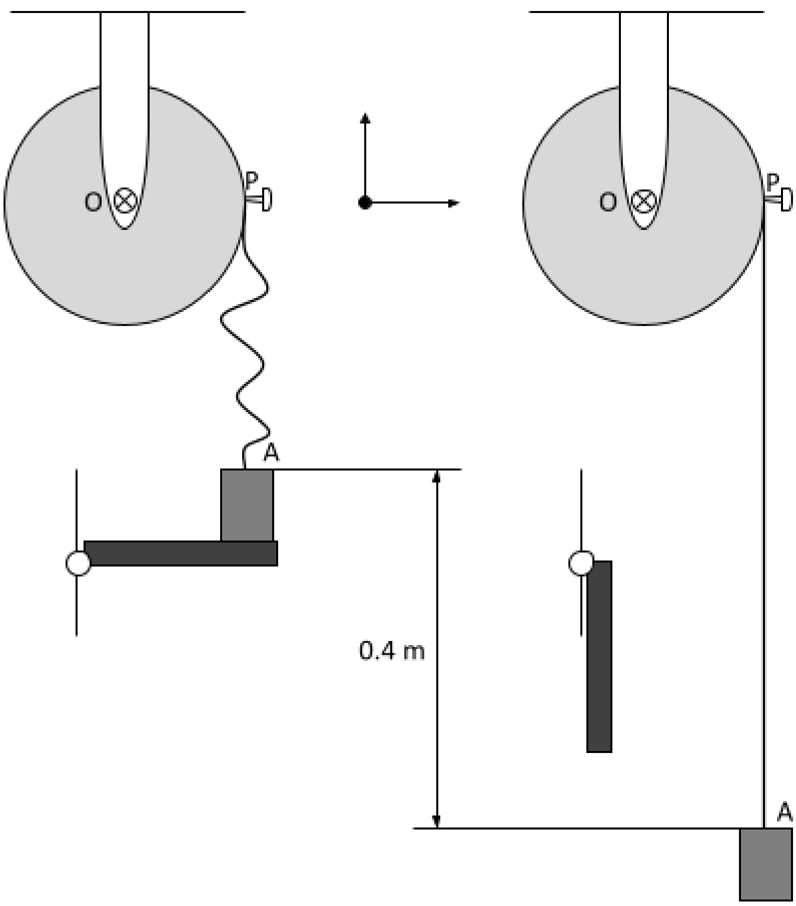
1. Aplicando el principio de conservación de la energía: la diferencia de energía potencial entre las posiciones inicial (horizontal) y final (vertical) es igual a la energía cinética en esta segunda posición: $mgh=I_O\omega^2/2$, donde h es la altura inicial del centro de masas con respecto a la posición final, h=0.1m; m=0.5Kg; $g=9.81m/s^2$; y el momento de inercia respecto a O se obtiene aplicando el teorema de Steiner:
   $I_O = mL^2/12 + m\cdot OC^2 = 0.01167$ $Kg.m^2$.
   Finalmente: ω=9.17rad/s. En función de los vectores unitarios: $\vec{i}$ horizontal hacia la derecha, $\vec{j}$ vertical hacia arriba y $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$, el vector velocidad angular resulta:
   $\vec{\omega} =- 9.17\vec{k}$ rad/s.
2. Aplicando el teorema del momento angular entorno al punto O, y considerando que la velocidad angular tras la percusión es nula:
   $-\vec{L}_{O1} = \vec{OA} \times \vec{P}_A$ (no aparece la percusión en O, pues tiene momento nulo respecto a O). Por otro lado, la percusión en A es horizontal, y el momento angular, $\vec{L}_{O1} = I_O\vec{\omega}$, con lo que se obtiene finalmente el valor de la percusión en A:
   $\vec{P}_A = 0.357\vec{i}$ Ns.
   Para calcular la percusión en O, se aplica el teorema de la cantidad de movimiento, considerando que la velocidad del centro de masas de la barra tras la percusión es nula:
   $$\vec{Po} + \vec{P}_A =- m\vec{V}_{C1} \Rightarrow \vec{Po} =- \vec{P}_A - m\vec{w}x\vec{OC} = 0.10150\vec{i}$$
   $\vec{P}_O + \vec{P}_A =- m\vec{V}_{C1} \Longrightarrow \vec{P}_O =- \vec{P}_A - m\vec{\omega} \times \vec{OC} =- \vec{P}_A + m\omega\overline{OC}\vec{i} =- 0.3066\vec{i}$ Ns.

3. Puesto que el coeficiente de restitución es ε=1, la velocidad de la bola tras el impacto es igual a la del extremo de la barra antes del impacto:
   $\varepsilon = 1 = \frac{\vec{v}_{B2}-\vec{v}_{A2}}{\vec{v}_{A1}-\vec{v}_{B1}} = \frac{\vec{v}_{B2}}{\vec{v}_{A1}} (\vec{v}_{B1} = \vec{v}_{A2} = 0)$

   $\vec{V}_{Bola2} = \vec{V}_{A1} = \vec{\omega} \times \vec{OA} = - 2.751\vec{i}$ m/s. Aplicando ahora el teorema del momento lineal a la bola, y considerando que la percusión sobre ésta es del mismo módulo, dirección y sentido contrario a la que sufre la barra, tenemos:
   $\vec{P}_{Bola} =- \vec{P}_A = m_{Bola}\vec{V}_{Bola2} \Longrightarrow m_{Bola} = 0.13$ Kg.

13. La polea de la figura es un disco homogéneo de masa **M = 0.5 kg** y radio **r = 0.2 m**, y tiene, unido a su periferia en el punto P, un cable inextensible de masa despreciable. En el otro extremo (punto A), el cable está unido a un cuerpo de masa **m = 0.2 kg**. Inicialmente, la polea está en reposo y el cuerpo descansa sobre una trampilla. Ésta se abre súbitamente y el cuerpo empieza a caer verticalmente bajo la acción de la gravedad, de forma que cuando ha descendido **h = 0.4 m**, el cable se tensa provocando percusiones simultáneas sobre el cuerpo y la polea (del mismo módulo y dirección, y sentidos opuestos). Suponiendo el choque elástico (en cuanto a las velocidades de P y A antes y después de la percusión), calcular:

1. La velocidad del cuerpo justo antes del impacto.
2. Las velocidades, angular de la polea y lineal del cuerpo justo después del impacto.
3. El valor de las percusiones que sufre la polea.



SOLUCIÓN

1. $\frac{1}{2}mv_{A1}^2 = mgh \Rightarrow v_{A1} = \sqrt{2gh} = 2.8\,m/s;\ \vec{v}_{A1} = -\sqrt{2gh}\,\vec{j} = -2.8\,\vec{j}\,m/s$

2. Escribiendo las velocidades: $\vec{v}_{A2} = v_{A2}\vec{j};\ \vec{v}_{P2} = -v_{P2}\vec{j};\ \vec{v}_{P1} = 0$, si el choque es elástico, y dado que las componentes normales de las velocidades son las componentes verticales, se tiene:

$$\varepsilon = \frac{v_{A2}^n - v_{P2}^n}{v_{P1}^n - v_{A1}^n} = \frac{v_{A2} - \left(-v_{P2}\right)}{0 - \left(-v_{A1}\right)} = 1 \Longrightarrow v_{A2} = v_{A1} - v_{P2}$$

Además, la velocidad angular de la polea tras el impacto se puede escribir: $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$, con lo que: $\vec{v}_{P2} = \vec{\omega} \times \vec{OP} = -\omega\vec{k} \times r\vec{i} = -\omega r\vec{j}$, y la ecuación anterior resulta:

$$v_{A2} = v_{A1} - \omega r \qquad (1)$$

El cuerpo sufre en A, la percusión $\vec{P}_A = P\,\vec{j}$, mientras que la polea sufre una percusión en P de igual módulo y dirección, pero sentido opuesto: $\vec{P}_P = -\vec{P}_A = -P\,\vec{j}$.

Aplicando el teorema del momento lineal de la percusión al cuerpo, tenemos:

$$\vec{P}_A = m\left(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{A1}\right) \Rightarrow P = m\left(v_{A2} + v_{A1}\right) \qquad (2)$$

Y aplicando sobre la polea el teorema del momento angular de la percusión, referido al punto O, tenemos:

$$\vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1} = \vec{OO} \times \vec{P}_O + \vec{OP} \times \vec{P}_P \Longrightarrow \vec{L}_{O2} = \vec{OP} \times \vec{P}_P \Rightarrow -I_O\omega\vec{k} = r\vec{i} \times (-P)\vec{j}$$

Es decir:

$$I_O\omega = rP \qquad (3)$$

Donde $I_O = \frac{1}{2}Mr^2$. Resolviendo el sistema de las ecuaciones (1), (2) y (3), se obtienen los valores de ω, v_{A2} y P:

$$\omega = \frac{2v_{A1}}{r\left(\frac{M}{2m}+1\right)} = 12.4 \text{ rad/s},\ \vec{\omega} = -12.4\,\vec{k} \text{ rad/s}$$

$$v_{A2} = v_{A1} - \omega r = 0.3 \text{ m/s},\ \vec{v}_{A2} = 0.3\,\vec{j} \text{ m/s}$$

$$P = m\left(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{A1}\right) = 0.6 \text{ Ns},\ \vec{P}_A = 0.6\,\vec{j} \text{ Ns}$$

3. Como se ha dicho, la polea sufre una percusión en el punto P opuesta a la que sufre el cuerpo en A:

$$\vec{P}_P = -0.6\,\vec{j} \text{ Ns}$$

Además, también sufre una percusión en el punto de apoyo O, pero ésta es opuesta a la anterior, como se deduce del teorema del momento lineal:

$$\vec{P}_O + \vec{P}_P = M\left(\vec{v}_{O2} - \vec{v}_{O1}\right) = 0 \Rightarrow \vec{P}_O = -\vec{P}_P = 0.6\,\vec{j} \text{ Ns}$$