

OpenCourseWare
TEORÍA DE MÁQUINAS

CRISTINA CASTEJÓN, EDUARDO CORRAL, RAÚL GISMEROS, MARIA JESÚS GÓMEZ,
JESÚS MENESES, HIGINIO RUBIO, ABRAHAM VADILLO

Mecánica Analítica



ÍNDICE



Newton
1643-1727



D'Alembert
1717-1783



Lagrange
1736-1813

- Dinámica de los sistemas mecánicos:

Formalismo **NEWTONIANO** Vs. GENERALIZADO

- COORDENADAS GENERALIZADAS.
- LIGADURAS.
- Principio de los TRABAJOS VIRTUALES y principio de **D'ALEMBERT**.
Ecuaciones fundamentales de la ESTÁTICA y de la DINÁMICA en coordenadas GENERALIZADAS.
- Ecuaciones de **LAGRANGE**.
- Ejemplos.

Formalismo NEWTONIANO (vectorial)



- Ec. Mvto: 2ª ley de Newton (1 partícula): $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}}$
- Se aplica a cada componente de un sistema mecánico: partícula, eslabón (Extensión a sólido rígido: Ecs. Newton-Euler)
- Se consideran TODAS las fuerzas, incluidas las fuerzas ENTRE COMPONENTES (considerar 3ª ley de Newton)
- Formalismo VECTORIAL: necesita un SIST. de REFERENCIA (inercial) para $\ddot{\vec{r}}$ y $\vec{F}$. Ej.: partícula en 2D (coordenadas cartesianas)

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_x \\m\ddot{y} &= F_y\end{aligned}$$

Formalismo ANALÍTICO (generalizado)

- Se aplica al sistema mecánico **GLOBAL**, permite excluir las fzas. de ligadura (ideales), como son las fzas. entre eslabones de un mecanismo.
- Formalismo **ESCALAR**, en **coord. GENERALIZADAS**: independientes de un SIST. de REFERENCIA. Ej.: part. en 2D (coord. polares)

$$m(\ddot{R} - R\dot{\vartheta}^2) = F_R$$
$$m(2\dot{R}\dot{\vartheta} + R\ddot{\vartheta}) = F_{\vartheta}$$

- Ambos formalismos **SON EQUIVALENTES**

Coordenadas GENERALIZADAS

- La posición de un sistema mecánico se puede definir con un conjunto de coordenadas (distancias, ángulos...) NO necesariamente cartesianas, para las que tampoco es necesario definir un SISTEMA de REFERENCIA: **COORDENADAS GENERALIZADAS**

$$\{q_1, \dots, q_n\} \equiv \{q_j\}_1^n \equiv \mathbf{q}$$

- El conjunto de coordenadas generalizadas puede ser:
 - **LIBRE**: coordenadas independientes entre sí, $n=g$ (gdl del sistema mecánico)
 - **LIGADO**: coordenadas dependientes entre sí, $n>g$ (existen ligaduras entre ellas)
- Las coordenadas cartesianas y generalizadas **deben estar relacionadas**:

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, \dots, q_n; t) \\ y_i = y_i(q_1, \dots, q_n; t); i = 1 \dots N (\text{n}^\circ \text{ partículas o puntos de interés}) \\ z_i = z_i(q_1, \dots, q_n; t) \end{cases}$$

EJEMPLO Coordenadas Generalizadas.

Relaciones entre Cartesianas-generalizadas

- Masa deslizante horizontal con péndulo en plano vertical:
 - Conjunto de coordenadas generalizadas:

$$\{s, \varphi\}$$

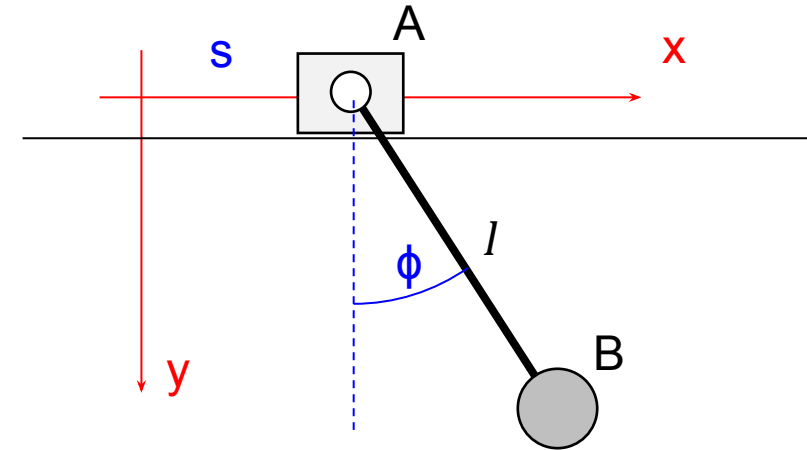
- Relaciones coordenadas cartesianas-generalizadas

$$x_A = s$$

$$y_A = 0$$

$$x_B = s + l \cdot \sin \varphi$$

$$y_B = l \cdot \cos \varphi$$



LIGADURAS

- **Restricciones** al movimiento del sistema mecánico.
- Implican **FUERZAS de LIGADURA**, que garantizan la restricción.
- Se describen mediante relaciones entre las coordenadas, si éstas son dependientes (conjunto LIGADO): **ECUACIONES DE LIGADURA**.

- Bloque en plano inclinado θ , 2 coordenadas: $\{x, y\}$. 1 ligadura:

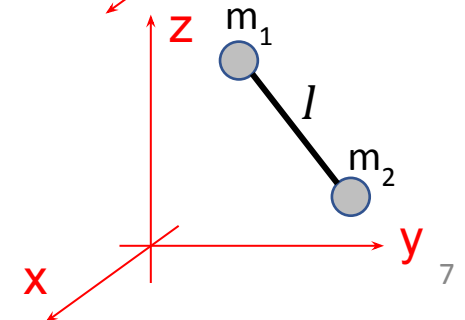
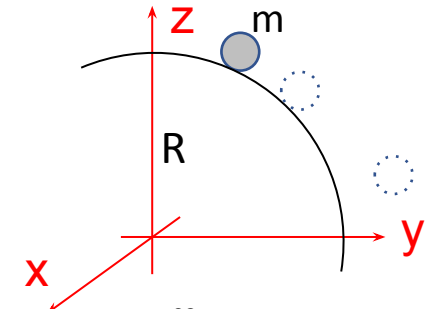
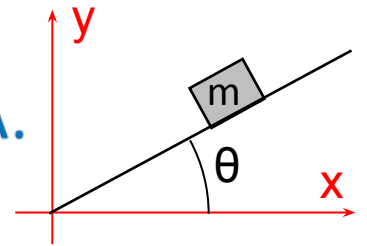
$$y - x \cdot \tan \theta = 0$$

- Masa sobre esfera de radio R , 3 coordenadas: $\{x, y, z\}$. 1 ligadura:

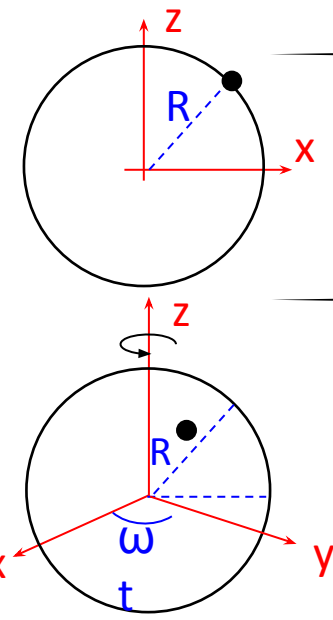
$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0$$

- 2 masas unidas por barra rígida de longitud l , 6 coordenadas: $\{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2\}$. 1 ligadura:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$



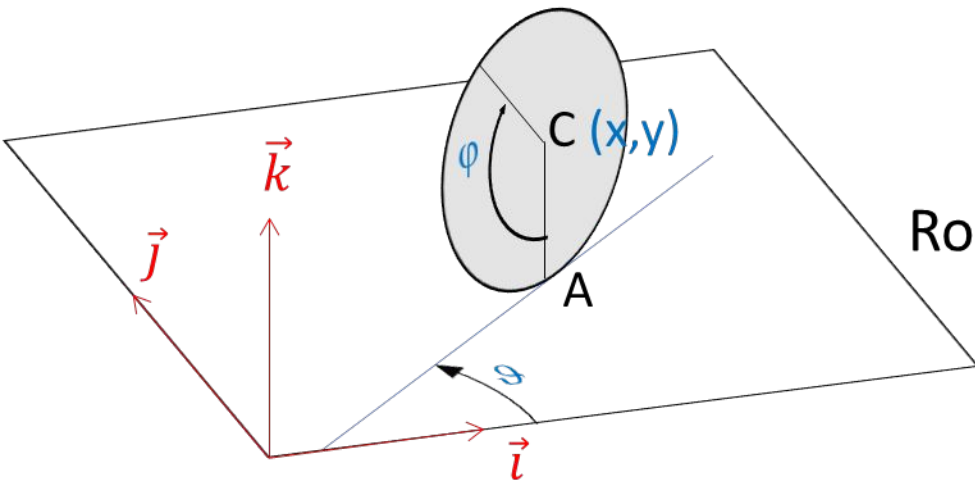
TIPOS DE LIGADURAS

- 
- **UNILATERAL**: se expresa mediante una desigualdad. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0$
 - **BILATERAL**: se expresa mediante una igualdad. En general: $\phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t) = 0$
 - **ESCLERÓNOMA**: NO depende explícitamente del tiempo. Ej.: cuenta sobre aro fijo. $x^2 + z^2 - R^2 = 0$
 - **REÓNOMAS**: depende explícitamente del tiempo. Ej.: cuenta sobre aro que gira en torno a z con velocidad ω cte. $y - x \cdot \tan \omega t = 0$
 - **HOLÓNOMA**: Que permite eliminar una coordenada dependiente, expresándola en función del resto. No puede ser unilateral
 - **NO HOLÓNOMA**: función que contiene derivadas de las coordenadas y que no se puede integrar para eliminar una coordenada.

Ejemplo LIGADURA NO-HOLÓNOMA

Disco vertical rodando sin deslizar sobre plano

COORDENADAS: Posición (x,y) ; Orientación (ϑ, ϕ) . ¿4 GdL?



$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= -\dot{\phi} \sin \vartheta \vec{i} + \dot{\phi} \cos \vartheta \vec{j} + \dot{\vartheta} \vec{k} \\ \vec{v}_C &= \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC} = \\ &= \vec{v}_A + R \dot{\phi} \cos \vartheta \vec{i} + R \dot{\phi} \sin \vartheta \vec{j}\end{aligned}$$

Rodadura: $\vec{v}_A = 0 \Rightarrow 2$ ligaduras NO-HOLÓNOMAS:

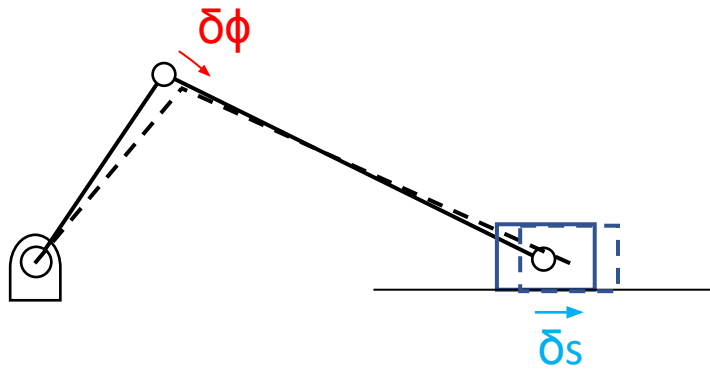
$$\begin{cases} \dot{x} - R \dot{\phi} \cos \vartheta = 0 \\ \dot{y} - R \dot{\phi} \sin \vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx - R \cos \vartheta d\phi = 0 \\ dy - R \sin \vartheta d\phi = 0 \end{cases}$$

No son integrables: no se pueden utilizar para eliminar dos coordenadas expresándolas en función de las otras dos. Aún así, el sistema tiene 2 GdL, como veremos.

DESPLAZAMIENTO VIRTUAL, δ

- Es la variación de las coordenadas de un sistema mecánico, de forma:

- **INFINITESIMAL**
- **ATEMPORAL** (a tiempo constante, $\delta t=0$)
- **COMPATIBLE CON LAS LIGADURAS** (por lo demás, arbitraria)



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n; t) \left\{ \begin{array}{ll} d\vec{r}_i = \sum_j^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt & \text{Desplazamiento REAL} \\ \delta\vec{r}_i = \sum_j^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j & \text{Desplazamiento VIRTUAL} \end{array} \right.$$

- En un desplazamiento virtual, la ligadura se sigue cumpliendo:

$$\phi(\mathbf{q}; t) = 0, \delta\phi = \sum \frac{\partial \phi}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

GdL y ligaduras no-holónomas

- **Definición de GdL:** nº de coord. cuya variación es ARBITRARIA (independiente del resto de variaciones) en un DESPLAZAMIENTO VIRTUAL del sistema mecánico.
- **Si las ligaduras son HOLÓNOMAS**, el nº de GdL coincide con el mínimo nº de coord. necesarias para **DEFINIR UNÍVOCAMENTE** la CONFIGURACIÓN del sistema.
- En el ejemplo anterior las 2 ligaduras NO-HOLÓNOMAS imponen restricciones a los desplazamientos virtuales. Las 4 coordenadas x , y , ϑ , φ son INDEPENDIENTES, pero sólo hay **2 DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES INDEPENDIENTES** (por ej. $\delta\vartheta$ y $\delta\varphi$):

$$\begin{cases} \delta x + R \cos \vartheta \cdot \delta \varphi = 0 \\ \delta y + R \sin \vartheta \cdot \delta \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{El sistema tiene 2 GdL}$$

Principio de los TRABAJOS VIRTUALES (PTV)



- El Trabajo virtual δW (realizado en un desplazamiento virtual, $\delta \mathbf{r}$):

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \text{ es nulo en el equilibrio}$$

- Distinguimos entre fuerzas aplicadas y de ligadura:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{apl} + \vec{F}_i^{lig}$$

- Pero las fzas. de ligadura IDEALES (LISAS) no realizan trabajo virtual, por lo tanto, el PTV establece como **condición de equilibrio**:

$$Eq \Leftrightarrow \delta W = \sum_i^N \vec{F}_i^{apl} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Ecuación (vectorial) fundamental de la **ESTÁTICA**

GENERALIZACIÓN del PTV

- El PTV, $Eq \Leftrightarrow \delta W = \sum_i^N \vec{F}_i^{apl} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, tiene las VENTAJAS:
 - Ya no aparecen las fuerzas de ligadura
 - Equilibrio estático en términos “geométricos” (desplazamientos virtuales)
 - Se puede “GENERALIZAR”: **vectores en c. cartesian.** $\vec{r}, \vec{a}, \vec{F} \dots \rightarrow$ **escalares en c. generaliz.** $q, T(q), V(q)$

Como $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n; t)$, entonces:

$$\delta W = \sum_i^N \vec{F}_i^{apl} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i^N \vec{F}_i^{apl} \cdot \sum_j^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j^n \left(\sum_i^N \vec{F}_i^{apl} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j^n Q_j \delta q_j$$

Donde $Q_j = \sum_i^N \vec{F}_i^{apl} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$, es la **FUERZA GENERALIZADA** asociada a la coordenada generalizada q_j .

$$Eq \Leftrightarrow \delta W = \sum_j^n Q_j \cdot \delta q_j = 0$$

Ecuación (escalar) fundamental de la **ESTÁTICA GENERALIZADA**



Principio de D'ALEMBERT (PD)

- Es una extensión del PTV (y de cualquier método de la estática) a la dinámica.
- PD: si se añaden a las fuerzas aplicadas, las fuerzas de inercia, $\vec{F}_i^{in} = -m_i\vec{a}_i$, entonces sistema ESTÁ EN EQUILIBRIO.
- Entonces se pueden aplicar los métodos, teoremas y principios de la estática para resolver la dinámica de un sistema. Concretamente el PTV:

$$\sum_i (\vec{F}_i^{apl} - m_i\vec{a}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

PTV+PD: Ecuación (vectorial) Fundamental de la **DINÁMICA**

- Las ventajas son las mismas que antes:
 - Ya no aparecen las fuerzas de ligadura.
 - Equilibrio (ahora “dinámico”) en términos de desplazamientos virtuales.
 - Se puede GENERALIZAR (no tan sencillo como antes: hay que generalizar el término de inercia).

GENERALIZACIÓN del PTV+PD

•

$$\sum_i^N (\vec{F}_i^{apl} - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Rightarrow (1) + (2) = 0$$

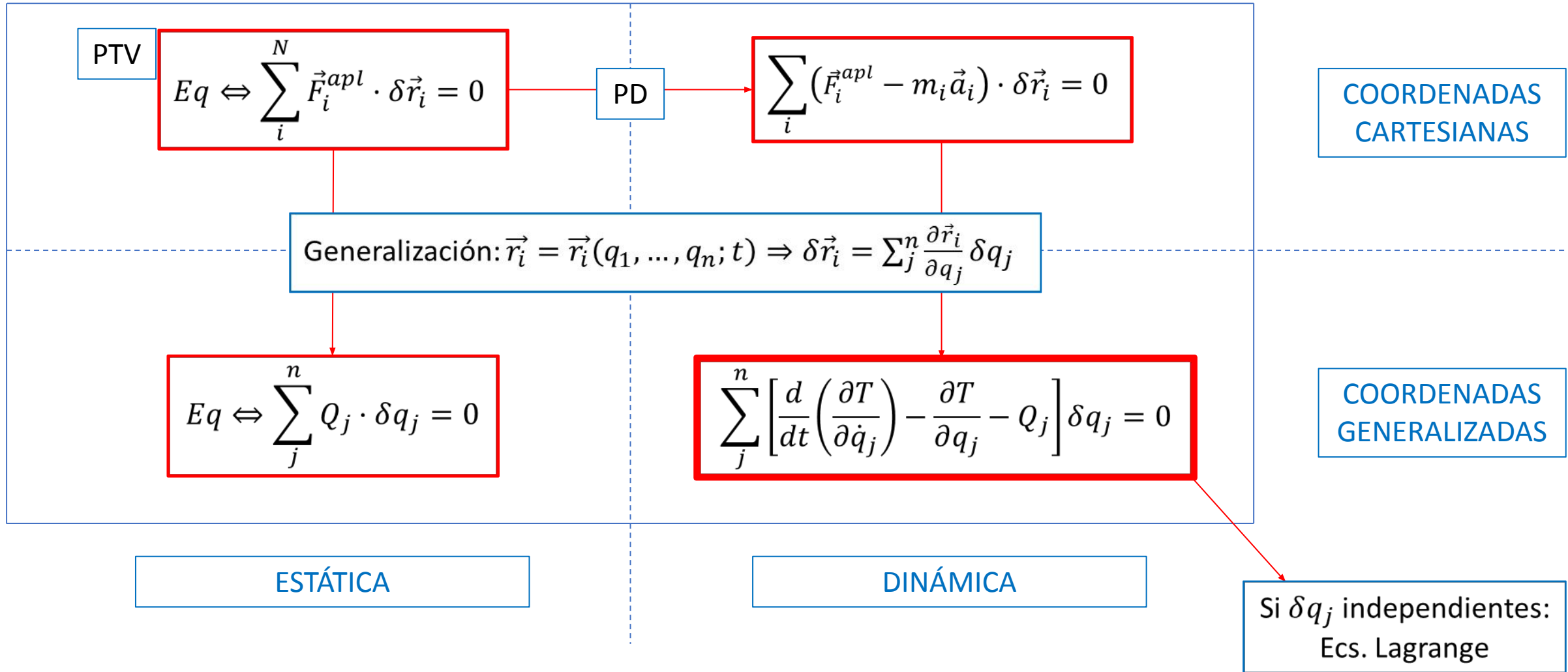
$$(1) = \sum_j^n Q_j \delta q_j$$

$$\begin{aligned} (2) &= - \sum_i^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \sum_j^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = - \sum_j^n \left(\sum_i^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = - \sum_j^n \left[\sum_i^N \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ &= \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{\text{}} = - \sum_j^n \left[\sum_i^N \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j = \xrightarrow{T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i} = - \sum_j^n \left[\sum_i^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ &= - \sum_j^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

$$(1) + (2) = 0 \Rightarrow \sum_j^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Ecuación (escalar) fundamental de la DINÁMICA **GENERALIZADA**

Esquema PTV – PD – Generalización



Conjunto LIBRE de coord. Generalizadas

ECUACIONES DE LAGRANGE



- Si el conjunto de coordenadas generalizadas es LIBRE los δq_j son independientes (arbitrarios) $\Rightarrow$ **TODOS los [] tienen que ser nulos**, y las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad j = 1, \dots, n.$$

- $\vec{F}_i = \vec{F}_i^C + \vec{F}_i^{NC}$. Para las fuerzas aplicadas CONSERVATIVAS, existe una función **ENERGÍA POTENCIAL**:

$V = V(\vec{r}_i) = V(q_i)$ tal que: $\vec{F}_i^C = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \vec{k} \right) \equiv - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$. Entonces:

$$Q_j = Q_j^C + Q_j^{NC}; \quad Q_j^C = \sum_i \vec{F}_i^C \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

- **LAGRANGIANA: $L = T - V$** . Como V no depende de las $\dot{q}_j$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$. Por tanto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC}. \quad j = 1, \dots, n$$

ECUACIONES DE LAGRANGE

Ecuaciones de LAGRANGE

ESTRATEGIA

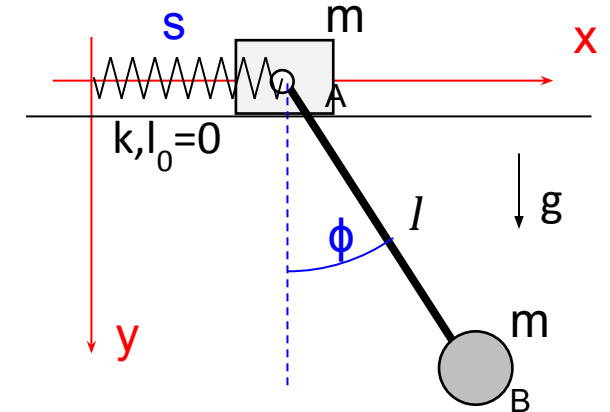
-

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC}. \quad j = 1, \dots, n$$

1. Elegir un conjunto de coordenadas generalizadas, $\{q_j\} j=1,\dots,n$. **LIBRE** ($n=g$)
2. Expresar T, V, L en función de $q_j, \dot{q}_j$ y t : $T = T(q_j, \dot{q}_j; t); V = V(q_j); L = L(q_j, \dot{q}_j; t)$
3. Calcular la fuerza generalizada no conservativa, en caso de que exista, a partir de: $\delta W = \sum_j^n Q_j^{NC} \delta q_j$, o directamente: $Q_j^{NC} = \sum_i^N \vec{F}_i^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$
4. Plantear 1 ec. por cada coord., calculando las derivadas parciales-temporales (ojo: distinguir entre $\frac{\partial L}{\partial \cdot}$ y $\frac{d}{dt}$)

Se obtiene un sistema de $n=g$ ecuaciones diferenciales **de orden 2** que son las **ECUACIONES DE MOVIMIENTO**

Ecuaciones de Lagrange. EJEMPLO



1. Conjunto de coordenadas generalizadas: $\{s, \varphi\}$ LIBRE.

2. **Energía cinética:** $T = \frac{1}{2}m_A\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2)$, con:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= s + l \sin \varphi \rightarrow \dot{x}_B = \dot{s} + l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ y_B &= l \cos \varphi \rightarrow \dot{y}_B = -l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \dot{s}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{s}\dot{\varphi} \cos \varphi \rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_B l^2 \dot{\varphi}^2 + m_B l \dot{s} \dot{\varphi} \cos \varphi$$

Energía potencial (elástica y gravitatoria): $V = \frac{1}{2}ks^2 - m_B gl \cos \varphi$

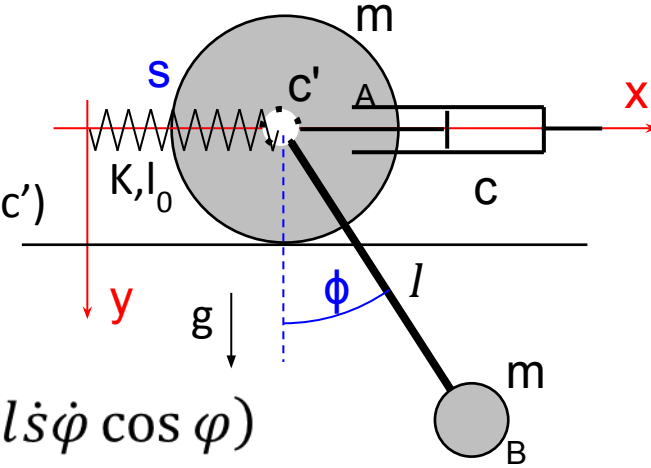
Lagrangiana $L = T - V = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_B l^2 \dot{\varphi}^2 + m_B l \dot{s} \dot{\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{2}ks^2 + m_B gl \cos \varphi$

3. No existen fuerzas disipativas

4. Ecs. mov.: $\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (m_A + m_B)\ddot{s} + m_B l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_B l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + ks = 0 \\ l \ddot{\varphi} + \ddot{s} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0 \end{cases}$

Ecuaciones de Lagrange. EJEMPLO

Resorte (k, l_0) , Disco (r, m_A) rueda sin deslizar, amortiguador (c) y péndulo amortiguado (l, m_B, c')



1. Conjunto de coordenadas generalizadas: $\{s, \varphi\}$ **LIBRE**.

2. **Energía cinética:** $T = \frac{1}{2} m_A \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_A r^2 \right) \frac{\dot{s}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_B (\dot{s}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{s}\dot{\varphi} \cos \varphi)$

Energía potencial (elástica y gravitatoria): $V = \frac{1}{2} k (s - l_0)^2 - m_B g l \cos \varphi$

Lagrangiana $L = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_A + m_B \right) \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m_B l^2 \dot{\varphi}^2 + m_B l \dot{s} \dot{\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{2} k (s - l_0)^2 + m_B g l \cos \varphi$

3. Existe una fza. disipativa (en dirección x), $F = -c\dot{s} = Q_s$, y un par disipativo, $M = -c'\dot{\varphi} = Q_\varphi$; ya que $\delta W = F\delta s + M\delta\varphi$

4. Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = Q_s \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{3}{2} m_A + m_B \right) \ddot{s} + m_B l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_B l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + k(s - l_0) = -c\dot{s} \\ l \ddot{\varphi} + \ddot{s} \cos \varphi + g \sin \varphi = -c'\dot{\varphi} \end{cases}$$

Créditos imágenes

Pág. 2:

Imagen 1 Retrato de Isaac Newton (1642-1727) por Godfrey Kneller, dominio público, via Wikimedia Commons.

Imagen 2 Retrato de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) por Maurice-Quentin Delatour, dominio público, via Wikimedia Commons.

Imagen 3 Joseph Louis Lagrange (1736-1813), dominio público, via Wikimedia Commons.

Pág. 3: Retrato de Isaac Newton (1642-1727) por Godfrey Kneller, dominio público, via Wikimedia Commons.

Pág. 12: Joseph Louis Lagrange (1736-1813), dominio público, via Wikimedia Commons.

Pág. 14: Retrato de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) por Maurice-Quentin Delatour, dominio público, via Wikimedia Commons.

Pág. 17: Joseph Louis Lagrange (1736-1813), dominio público, via Wikimedia Commons.