

OpenCourseWare

TEORÍA DE MÁQUINAS

CRISTINA CASTEJÓN SISAMÓN

EDUARDO CORRAL ABAD

RAÚL GISMEROS MORENO

MARIA JESÚS GÓMEZ GARCÍA

JESÚS MENESES ALONSO

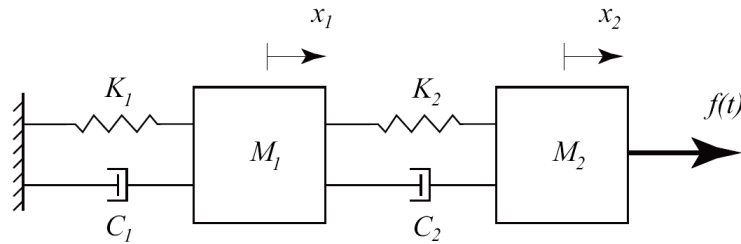
HIGINIO RUBIO ALONSO

ABRAHAM VADILLO MORILLAS

Ejercicios de Mecánica Analítica



1. Dado un sistema mecánico, como el de la figura, compuesto por dos masas, dos resortes lineales y dos amortiguadores, moviéndose en la horizontal. Especificar, por métodos lagrangianos, las ecuaciones del movimiento del sistema.



Solución:

Coordenadas generalizadas: $\{q_1 = x_1 \quad q_2 = x_2\}$

Fuerzas generalizadas exteriores: $\{Q_1 = 0 \quad Q_2 = f(t)\}$

$$T = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}K_1x_1^2 + \frac{1}{2}K_2(x_2 - x_1)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}K_1x_1^2 - \frac{1}{2}K_2(x_2 - x_1)^2$$

$$P = \frac{1}{2}C_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}C_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_2} = f(t)$$

Derivadas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}(M_1\dot{x}_1) = M_1\ddot{x}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -(K_1 + K_2)x_1 + K_2x_2 \quad \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = -(C_1 + C_2)\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}(M_2\dot{x}_2) = M_2\ddot{x}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = K_2x_1 - K_2x_2 \quad \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_2} = C_2\dot{x}_1 - C_2\dot{x}_2$$

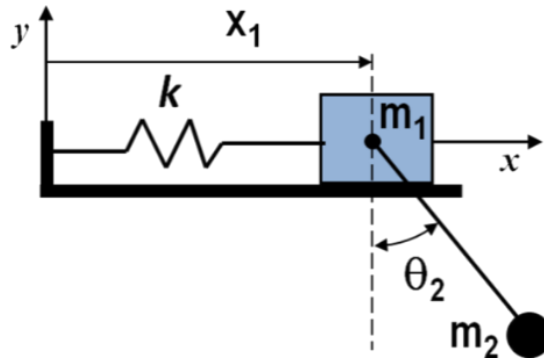
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1\ddot{x}_1 + (C_1 + C_2)\dot{x}_1 - C_2\dot{x}_2 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2$$

$$= 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_2} = f(t) \quad \Rightarrow \quad M_2\ddot{x}_2 - C_2\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2 - K_2x_1 + K_2x_2 = f(t)$$

2. El sistema mecánico de la figura se mueve en el plano XY libremente, sin rozamientos, bajo el efecto de la fuerza de gravedad y se compone de un sistema masa-resorte lineal y de un péndulo plano. El sistema masa-

resorte lineal está formado por un resorte de coeficiente k y un cuerpo de masa m_1 que se mueve en la horizontal (eje X). El péndulo tiene su centro de suspensión en el centro de masas del cuerpo 1 y está constituido por una masa m_2 , un hilo de masa despreciable y longitud l_2 que forma un ángulo θ_2 respecto a la vertical (eje Y). Tomar como posición de resorte inicial cuando está totalmente comprimido ($x_1=0$)

- Definir las coordenadas generalizadas usadas y especificar las ligaduras.
- Expresar la función Lagrangiana.
- Plantear las ecuaciones de Lagrange
- Especificar las ecuaciones del sistema.



Solución:

$x_1 = x_1, y_1 = 0, x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2, y_2 = y_1 - l_2 \cos \theta_2$ Las coordenadas independientes serán: x_1 y θ_2

$h = l_2 - l_2 \cos \theta$ ó $y_2 = -l_2 \cos \theta$ (dos criterios validos)

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{1}{2} k x_1^2 - m_2 g y_2 \quad Q = 0$$

$$\frac{d}{dt} (x_1 = x_1, x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2, y_2 = -l_2 \cos \theta_2) \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_1, \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2,$$

$$\dot{y}_2 = \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2)^2 + (\dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2)^2 \right] - \frac{1}{2} k x_1^2 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2 - \frac{1}{2} k x_1^2 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left((m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx_1$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 = -kx_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_1 l_2 \cos \theta_2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2) = m_2 \ddot{x}_1 l_2 \cos \theta_2 - m_2 \dot{x}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

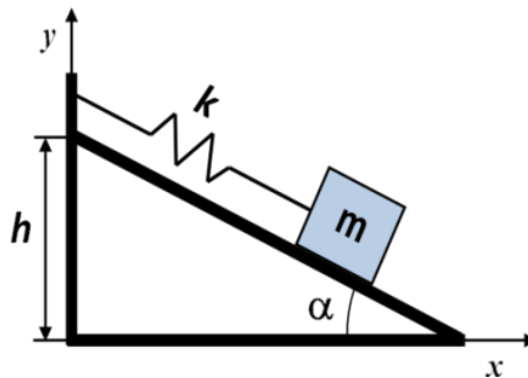
$$m_2 \ddot{x}_1 l_2 \cos \theta_2 - m_2 \dot{x}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + kx_1 = m_2 l_2 (\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2) \quad l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 = -\ddot{x}_1 \cos \theta_2$$

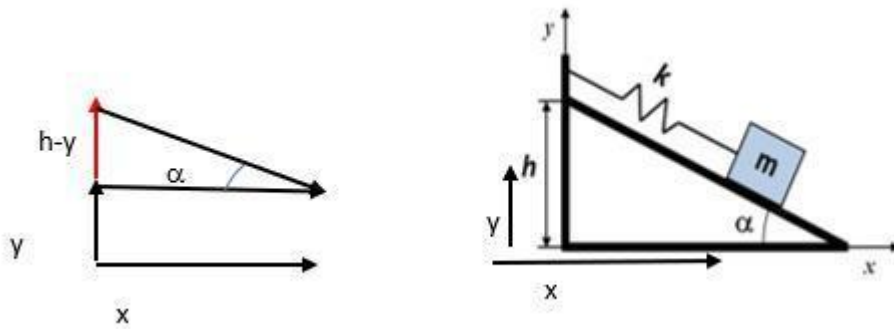
$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + kx_1 = 0 \quad m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{x}_1 \cos \theta_2 + m_2 l_2 g \sin \theta_2 = 0$$

3. El sistema mecánico de la figura se mueve en el plano XY libremente, sin rozamiento, bajo el efecto de la gravedad y se compone de un sistema masa-resorte lineal por un plano inclinado. El sistema masa-resorte lineal está constituido por un resorte lineal de coeficiente k y un cuerpo de masa m que se mueve por un plano inclinado de altura h que forma un ángulo α con la horizontal (eje X). Tomar como posición de resorte inicial cuando está totalmente comprimido ($x=0$)

- Definir las coordenadas generalizadas usadas y especificar las ligaduras.
- Expresar la función Lagrangiana.
- Plantear la ecuación de Lagrange.
- Especificar la ecuación del sistema.



Solución:



La coordenada independiente será: x

$$x = x \rightarrow \dot{x} = \dot{x}$$

$$s = \frac{x}{\cos \alpha} \rightarrow \dot{s} = \frac{\dot{x}}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{h-y}{x}; y = h - x \cdot \tan \alpha \rightarrow \dot{y} = -\dot{x} \cdot \tan \alpha$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = \frac{1}{2} k s^2 + mg(h - x \cdot \tan \alpha)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} k s^2 - mg(h - x \cdot \tan \alpha) \quad Q = 0$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{x}^2 \cdot \tan^2 \alpha) - \frac{1}{2} k \left(\frac{x}{\cos \alpha} \right)^2 - mg(h - x \cdot \tan \alpha) \quad Q = 0$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{m \dot{x}^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{2} k \left(\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} \right) - mgh + mgx \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}}{\cos^2 \alpha} \right) = \frac{m \ddot{x}}{\cos^2 \alpha}$$

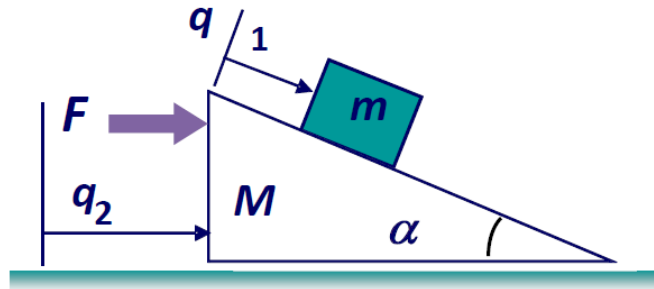
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{kx}{\cos^2 \alpha} + mg \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{m \ddot{x}}{\cos^2 \alpha} + \frac{kx}{\cos^2 \alpha} - mg \cdot \tan \alpha = 0$$

$$m \ddot{x} + kx - mg \cdot \tan \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

$$m \ddot{x} + kx - \frac{1}{2} mg \cdot \sin(2\alpha) = 0$$

4. El sistema mecánico de la figura se mueve en el plano XY, sin rozamiento, bajo el efecto de la fuerza F (considerando la fuerza de gravedad) y se compone de un plano inclinado móvil, de ángulo α y masa M , por el cual desliza un cuerpo de masa m . Empleando como coordenadas libres las indicadas en la figura, especificar las ecuaciones del movimiento del sistema por métodos lagrangianos.



Solución:

Las coordenadas libres son las indicadas en la figura q_1 y q_2 .

La velocidad del cuerpo podemos calcularla a partir de sus componentes coordenados

$$v^2 = (v_x^2 + v_y^2) = (\dot{q}_2 + \dot{q}_1 \cos \alpha)^2 + \dot{q}_1^2 \alpha$$

Energía Cinética: $T = \frac{1}{2}(M + m)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2\dot{q}_1 \cos \alpha)$

Energía Potencial: $U = -mgy = -mgq_1 \sin \alpha$

Lagrangiana: $L = T - U = \frac{1}{2}(M + m)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2\dot{q}_1 \cos \alpha) + mgq_1 \sin \alpha$

Hay 2 coordenadas generalizadas, así habrá 2 ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \cos \alpha) - mg \sin \alpha = 0$$

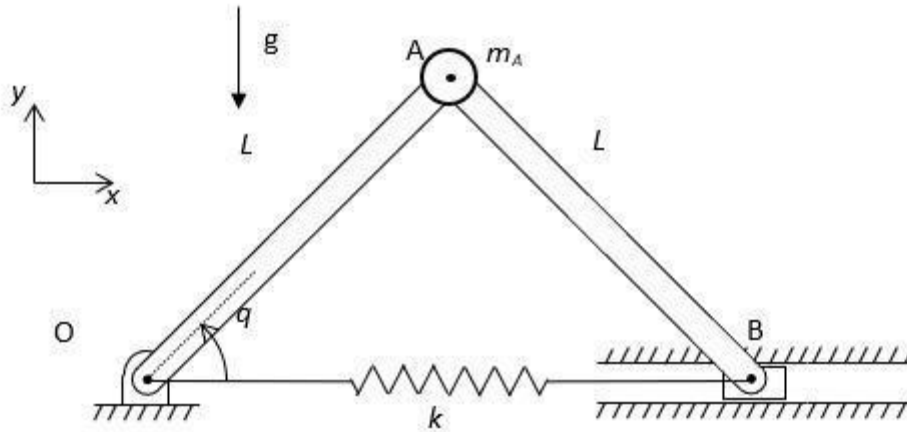
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F \Rightarrow M\ddot{q}_2 + m(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \cos \alpha) = F$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{M + m} (F - m\ddot{q}_1 \cos \alpha)$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{g \sin \alpha + \frac{F}{M + m} \cos \alpha}{1 - \frac{m}{M + m} \cos^2 \alpha} = \frac{(M + m)g \sin \alpha + F \cos \alpha}{M + m - m \cos^2 \alpha}$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{(M + m)g \sin \alpha + F \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$$

5. Dos barras, ambas de longitud L conocida, están conectadas como se indica en la figura. Todas las juntas O, A y B son de rotación y sin fricción. En A se encuentra una masa m_A . En punto B tiene restringido su movimiento en la dirección vertical, como se muestra en la imagen. El resorte tiene una longitud natural de valor $l_o = L$, y una constante de rigidez k conocida.



- Expresar la posición de las juntas A y B en función de la coordenada generalizada q .
- Encuentre la expresión de la energía cinética, T , y potencial, U , en función de la coordenada generalizada q .
- Especifique la función Lagrangiana para el sistema.
- Encuentre la ecuación de movimiento del sistema (en la forma: $\ddot{q} = \dots$).
- Cuando el sistema está en equilibrio ($\ddot{q} = 0$), encuentre una expresión simplificada para q .
Suponga que el ángulo q es pequeño, con lo cual: $\tan q = \sin q = q$, y $\cos q = 1$.

Solución:

- $$X_A = L \cos q$$

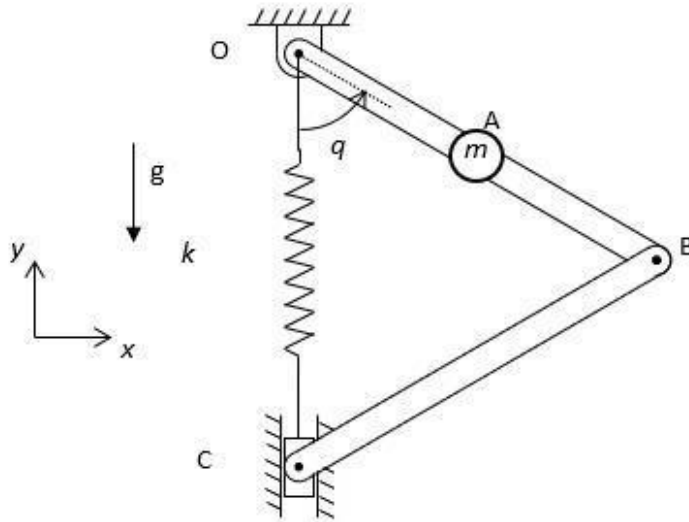
$$Y_A = L \sin q$$

$$X_B = 2L \cos q$$

$$Y_B = 0$$
- $$T = \frac{1}{2} m L^2 \dot{q}^2$$

$$U = m g L \sin q + \frac{1}{2} k L^2 (2 \cos q - 1)^2$$
- $$L = T - U = \frac{1}{2} m L^2 \dot{q}^2 - m g L \sin q - \frac{1}{2} k L^2 (2 \cos q - 1)^2$$
- $$\ddot{q} = - (g/L) \cos q + (4k/m) \cos q \cdot \sin q - (2K/m) \sin q$$
- $$Q = (mg)/(2KL)$$

6. Dos barras, ambas de longitud $L = 0.5$ m, están conectadas como se indica en la figura. Todas las juntas O, B y C son de rotación y sin fricción. En A, en el centro del eslabón, se encuentra una masa m . el resto de los elementos se consideran de masa despreciable. La rigidez del resorte es k y la longitud natural l_0 . El punto C tiene restringido su movimiento a la dirección vertical



- Especifique la función Lagrangiana para el sistema ($L = T - U$) en términos de la coordenada generalizada q .
- Encuentre la ecuación de movimiento del sistema (en la forma: $\ddot{q} = \dots$).
- Cuando el sistema está en equilibrio ($\ddot{q} = 0$), encuentre la expresión para q .
- Utilizando los parámetros dados a continuación, calcular los valores correspondientes de q para la posición de equilibrio. Note que q es solo válido en el rango $q = [0^\circ, 72.5^\circ]$ para garantizar que el resorte está a tracción).

$$m = 0.5 \text{ kg} ; k = 10 \text{ N/m} ; l_0 = 0.3 \text{ m} ; g = 10 \text{ m/s}^2$$

Solución:

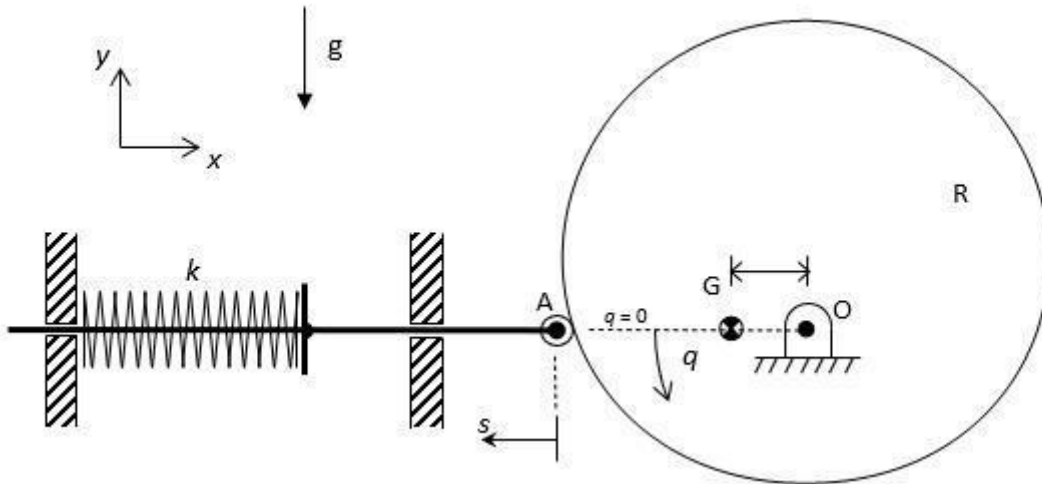
$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}_0^2 \frac{L^2}{4} - mg \frac{L}{2} (1 - \cos q) - \frac{1}{2} k (2l \cos q - l_0)^2$$

$$\ddot{q} = -\frac{2}{l} g \sin q + \frac{8k}{ml} (2l \cos q - l_0) \sin q$$

$$\ddot{q} = 0 \text{ Si } q = 0, \pi, 2\pi, 3\pi; q = \arccos \left(\frac{1}{8l} \left(\frac{mg}{K} + 4l_0 \right) \right)$$

$$q_1 = 64,84^\circ$$

7. El mecanismo de leva mostrado está formado por una leva de disco y un seguidor de traslación de rodillo (A). La leva rota alrededor de O, y tiene su centro de masas en G y se consideran los efectos gravitacionales. El seguidor actúa sobre un resorte de constante k y longitud natural l_0 . La inercia de la leva alrededor de O es I_0 , y su masa es m . No se consideran otras masas o momentos de inercias ni fricciones.



Se describe el sistema utilizando la rotación de la leva (coordenada q) y la posición de la figura muestra el instante en el que $q = 0$.

El desplazamiento del seguidor: $s = R \sin q$

Longitud del resorte: $l = 3R - s$

longitud natural del resorte: $l_0 = 4R$

- Especifique la función Lagrangiana para el sistema ($L = T - U$) en términos de la coordenada generalizada q .
- Encuentre la ecuación de movimiento del sistema (en la forma: $\ddot{q} = \dots$).
- Cuando el sistema está en equilibrio ($\ddot{q} = 0$), encuentre la expresión para q .
- Utilizando los parámetros siguientes, calcular todos los valores de q para condiciones de equilibrio.

$$m = 0.75 \text{ kg}; R = 0.15 \text{ m}; k = 50 \text{ N/m}; g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Solución:

$$L = \frac{1}{2} I_0 \dot{q}^2 + mgR \sin q - \frac{1}{2} k R^2 (1 + \sin q)^2$$

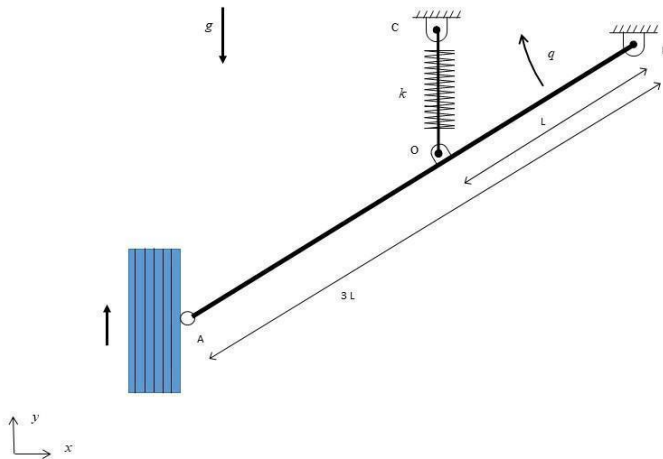
$$\ddot{q} = -\frac{\cos q}{I_0} (k R^2 (1 + \sin q) - mgR)$$

$$\ddot{q} = 0 \text{ Si } q = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}; q = \arcsin\left(\frac{mg}{Rk} - 1\right)$$

$$q = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}; q_1 = 0; q_2 = \pi$$

8. Se dispone de un amortiguador de un 4x4, cuyo esquema se representa en la Figura, formado por una biela rígida correspondiente a la barra AB y un muelle entre O y C. Los puntos C y B, que son juntas de revolución fijas, están separados a una distancia L. La rueda se puede simplificar como una masa puntual M en el punto A. Se puede despreciar las masas de la biela y el muelle. El muelle tiene una constante de rigidez k y su longitud de reposo es L. Debido a que las variaciones de altura de la rueda son pequeñas, se puede asumir que la dirección del muelle OC es siempre vertical.

Obtenga la ecuación de movimiento del conjunto mecánico en función de la coordenada generalizada q



Solución:

x_A	$3 \cdot L \cdot \cos q$
y_A	$-3 \cdot L \cdot \sin q$
T	$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 9L^2 \cdot \dot{q}^2$
V	$V = -m \cdot g \cdot 3L \cdot \sin q + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (L \cdot \sin q - L)^2$ $V = -m \cdot g \cdot 3L \cdot \sin q + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (L^2 \cdot q + L^2 - 2 \cdot L^2 \cdot \sin q)$ $V = -m \cdot g \cdot 3L \cdot \sin q + \frac{1}{2} \cdot k \cdot L^2 \cdot (q + 1 - 2 \cdot \sin q)$
Ecuación de movimiento	$\ddot{q} = + \left(\frac{g}{3L} \right) \cos q - \left(\frac{k}{18m} \right) \cdot (2 \cdot \sin q \cdot \cos q - 2 \cdot \cos q)$

$$L = T - V = \frac{9}{2} mL^2 \dot{q}^2 + 3mgL \cdot \sin q - \frac{1}{2} kL^2 (q + 1 - 2 \sin q)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (9mL^2 \dot{q}) = 9mL^2 \ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3mgL \cdot \cos q - \frac{1}{2}kL^2(2 \cdot \sin q \cdot \cos q - 2 \cdot \cos q)$$

$$9mL^2 \ddot{q} - 3mgL \cdot \cos q + \frac{1}{2}kL^2(2 \cdot \sin q \cdot \cos q - 2 \cdot \cos q) = 0$$

$$\ddot{q} = + \left(\frac{g}{3L} \right) \cos q - \left(\frac{k}{18m} \right) \cdot (2 \cdot \sin q \cdot \cos q - 2 \cdot \cos q)$$